या. पेरेलमान

मनोरंजक बीजगणित

लॉगरिथमीय फले

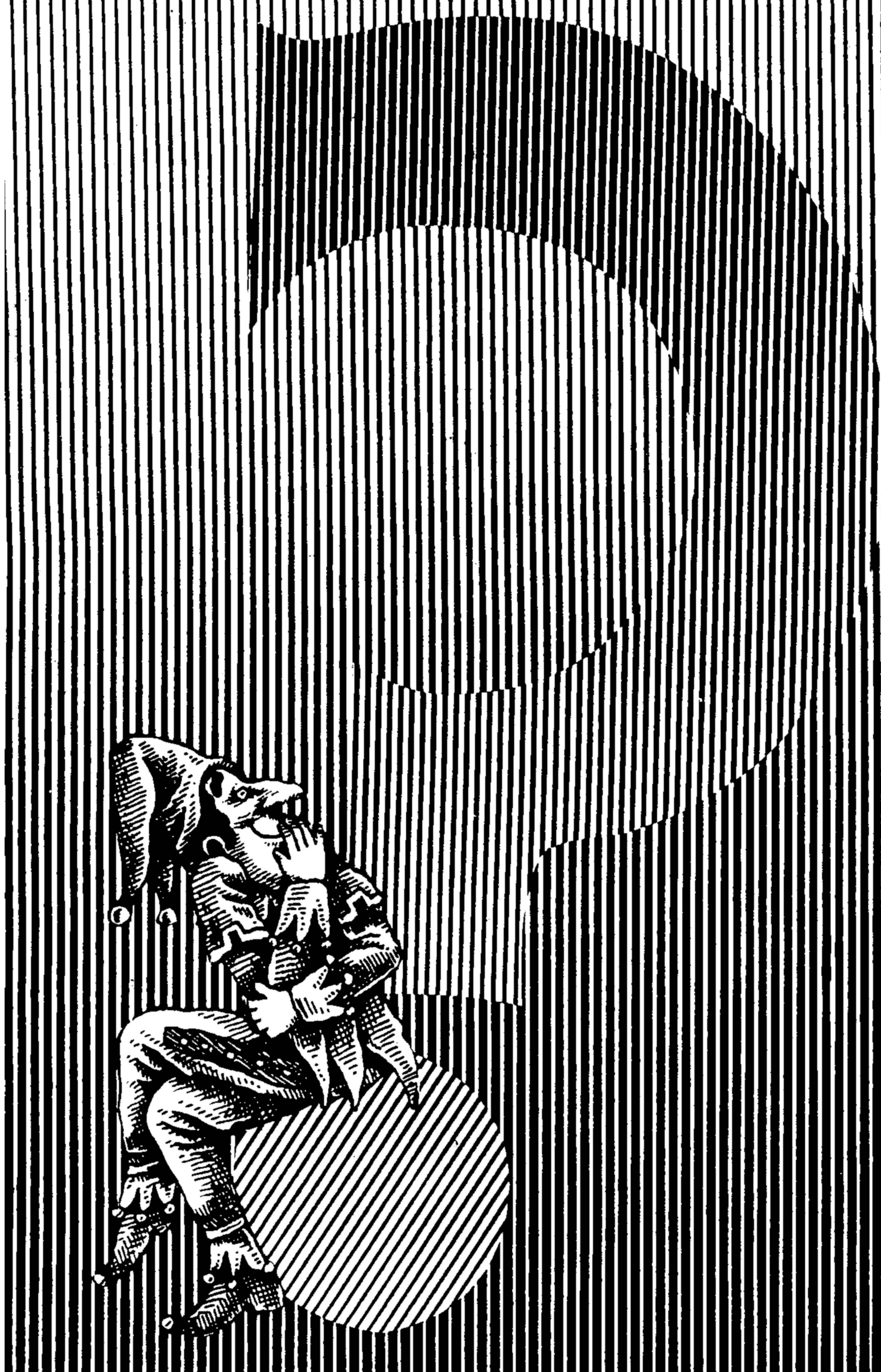
गणितातील पाचवा संस्कार

कमाल आणि किमान किंमती

अंकगणिताच्या मदतीस

वर्गसमीकरणे





मनोरंजक बीजगणित

Я. П. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

«НАУКА»
МОСКВА

या. पेरेलमान

मनोरंजक बीजगणित

"मीर" प्रकाशन
मॉस्को

लोकवाङ्मय गृह प्रा. लि.
मुंबई

अनुवाद : डॉ. रविन्द्र रसाळ

На языке маратхи

सोविएत संघात मुद्रित

अनुक्रमणिका

1. गणितशास्त्राचा पाचवा भाग

2. बीजगणिताची भाषा

3. अंकगणिताच्या मदतीस

4. डिओफॅन्ट समीकरणे

5. सहावा गणिती संस्कार

6. वर्गसमीकरणे

7. कमाल आणि किमान किंमती

8. श्रेढी

9. सातवा गणिती संस्कार

प्रकरण 1

गणितशास्त्राचा

पाचवा भाग

पाचवा संस्कार

अनेकदा बीजगणिताचा उल्लेख "सात क्रियांचे अंकगणित" असा केला जातो कारण गणितशास्त्रातील चार मूलभूत संस्कारांमध्ये बीजगणिताने तीन नव्या संस्कारांची भर घातली आहे.

यापैकी पाचव्या संस्काराने – घातकरणाने आपण बीजगणितावरील विवेचनाची सुरुवात करू.

आपल्या दैनदिन, व्यावहारिक जीवनामध्ये घातकरणाची काही आवश्यकता आहे काय? नक्कीच आहे. प्रत्यक्ष जीवनामध्ये अनेकदा आपला संबंध घातकरणाशी येतो. उदाहरणार्थ, जमीनीचे क्षेत्रफळ किंवा एखाद्या पाण्याच्या टाकीची क्षमता मोजण्यासाठी आपणाला मोठमोठ्या संख्यांचा दुसरा, तिसरा घातांक घ्यावा लागतो. गुरुत्वाकर्षण, विद्युत-स्थितिक आणि चुंबकीय परिणाम, प्रकाश, ध्वनी यांची तीव्रता त्याच-प्रमाणे सूर्याभोवती फिरणाऱ्या ग्रहांचा भ्रमणकाळ व पृथ्वीभोवती फिरणाऱ्या उपग्रहांचा भ्रमणकाळ इत्यादींचे मोज-मापन करण्यासाठी आपणाला घातांकांचीच मदत घ्यावी लागते.

रोजच्या व्यावहारिक जीवनामध्ये आपला संबंध केवळ दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घातांकांशीच येतो असे मुळीच नाही. अभियंत्यांचा संबंध तर नेहमीच चवथ्या घातांकांशी येत असतो व काही इतर मूल्य-मापनात तर सहाव्या घातांकांशी पण येतो. पाण्याचा प्रवाह किती वेगाने दगडे वाहून नेतो हे ठरविण्यासाठी अभियंता सहाव्या घातांकावर अवलंबून असतो. जर एका नदीच्या पाण्याचा वेग दुसऱ्या नदीच्या

प्रवाहापेक्षा चार पट अधिक असेल, तर जलद गतीने धावणारी नदी मंदगतीने धावणाऱ्या नदीपेक्षा 4096 पट अधिक जड दगडे वाहून नेऊ शकते.

विद्युत दिव्यामधील तारेसारख्या उद्दिप्त वस्तूंच्या तेजस्वीपणाचे मूल्य-मापन करण्यासाठी तर आपणाला ही मर्यादासुद्धा ओलांडावी लागते. एखाद्या वस्तूचा तेजस्वीपणा ती वस्तू शुक्रतेपर्यंत तापविल्यास तपमाना-च्या बाराव्या घातांकाइतका व लाल होईपर्यंत तापविल्यास तपमानाच्या तिसाव्या घातांकाइतका वाढतो (येथे निरपेक्ष म्हणजे —273° से. पासून मोजले जाणारे तपमान ध्यानात घेतले आहे). याचा अर्थ असा की एखादी वस्तू 2 000° से. पासून 4 000° से. (निरपेक्ष) तपमानापर्यंत म्हणजेच दुप्पट तापविल्यास ती 2^{12} पट अधिक तेजस्वी बनते. दुसऱ्या शब्दात सांगायचे झाले तर 4 000 पटीने जास्त तेजस्वी बनते. विद्युत दिवे बनविताना या खास संबंधाचे किती महत्त्व आहे याविषयी आपण नंतर चर्चा करू.

अजस्र संख्या

कदाचित खगोलशास्त्रज्ञ वगळता इतर कोणीही गणितशास्त्रातील पाचव्या भागाचा इतक्या व्यापक प्रमाणात उपयोग करीत नसावे. अवकाशातील ग्रहांचा आणि ताऱ्यांचा अभ्यास करणाऱ्या शास्त्रज्ञांना प्रत्येक पावलागणीत एखाद-दुसऱ्या अर्थपूर्ण अंकापुढे शून्यांची लांबलचक रांग असलेल्या अजस्र संख्यांशी हातमिळावणी करावी लागते. अशा या "खगोलशास्त्रीय संख्या" लिहिणे आणि त्यांचा याच स्वरूपात गणितशास्त्रीय संस्कारांमध्ये वापर करणे अत्यंत गैरसोयीचे ठरते. उदाहरणार्थ, अँड्रोमेडा ताऱ्यापर्यंतचे अंतर किलोमीटरमध्ये दर्शविण्या-साठी आपणाला नेहमी पुढील संख्या लिहावी लागेल :

95 000 000 000 000 000 000

काही खगोलशास्त्रीय हिशोबांमध्ये हेच अंतर कि. मी. मध्ये नव्हे, तर अधिक छोट्या एककामध्ये, सेंटिमीटरमध्ये व्यक्त करावे

लागते. वरील अंतर जर आपण सें. मी. मध्ये द्यावयाचे ठरविले तर आपणास पुढील संख्या लिहावी लागेल :

9 500 000 000 000 000 000 000 000

ताऱ्यांचे वजन दर्शविणाऱ्या संख्या तर याहीपेक्षा मोठ्या असतात आणि अनेक ठिकाणी हे वजन किलोग्रॅममध्ये नव्हे तर ग्रॅममध्ये वापरावे लागते. आपल्या सूर्याचे ग्रॅममधील वजन आहे :

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

वरील अजस्र संख्यांवरून आपणाला कल्पना येईल की हिशोबामध्ये अशा संख्यांचा वापर करणे किती गैरसोयीचे आहे व त्यामुळे किती सहजगत्या चुका होऊ शकतील. यापेक्षाही अनेक पटीने अजस्र अवकाशिक संख्या आहेत.

घातकरणामुळे या समस्येवर सहज मात करता येते. शब्दांद्वारे दर्शविण्यात आलेले एकक दशकाचा एक ठराविक घातांक व्यक्त करीत असते जसे :

$$100 = 10^2,\ 1\,000 = 10^3,\ 10\,000 = 10^4$$

यामुळेच वर उल्लेख केलेल्यांपैकी शेवटच्या दोन अजस्र संख्या घातांकांच्या साहाय्याने पुढीलप्रमाणे लिहिता येतील :

पहिली . . . 95×10^{23}
दुसरी . . $1\,983 \times 10^{30}$

जागेची बचत करण्यासाठी हा सर्व प्रयत्न नव्हे, तर हिशेब सहजपणे करता यावा हा त्यामागील मुख्य हेतू. या दोन संख्यांचा जर गुणाकार करावयाचा असेल तर फक्त $95 \times 1983 = 188\,385$ हा गुणाकारच पुरेसा असून त्यापुढे 10^{23+30} हे पद गुणाकारासाठी ठेवले की झाले :

$$95 \times 10^{23} \times 1\,983 \times 10^{30} = 188\,385 \times 10^{53}$$

प्रथम 23 शून्य असलेली संख्या लिहा त्यानंतर 30 शून्य असलेली व शेवटी 53 शून्य असलेली संख्या उत्तरादाखल लिहा! यापेक्षा वरील पद्धत कितीतरी सोपी आहे. शिवाय इतके शून्य मांडताना चूक होऊन चुकीचे उत्तर मिळण्याचीही शक्यता दाट असते.

संपूर्ण हवेचे वजन किती ?

घातांकांचा वापर केल्यामुळे प्रचंड संख्या टाळता येतात व मोठ-मोठ्या संख्यांचे गणितीय हिशोब अधिक सहजतेने सोडविता येतात याची खात्री पटावी म्हणून एक साधा हिशोब करू: पृथ्वीच्या गोलाचे वजन त्याच्या सभोवतालच्या हवेच्या वजनापेक्षा कितीपट जास्त आहे ते ठरवू.

आपणाला ठाऊकच आहे की पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरील प्रत्येक वर्ग सेंटिमीटर जागेवर हवा जवळ जवळ एक कि. ग्रॅ. शक्तीचा दाब देत असते. याचा अर्थ असा की 1 वर्ग सें. मी. जागेवर कार्य करणाऱ्या वातावरणाच्या स्तंभाचे वजन 1 कि. ग्रॅ. असते. पृथ्वीवरील संपूर्ण वातावरण हे जणू काही अशा प्रकारच्या स्तंभांचे बनलेले असते. त्यामुळे या स्तंभांची संख्या पृथ्वीचे क्षेत्रफळ जितके वर्ग सें. मी. आहे तितकीच आहे व तितकेच कि. ग्रॅ. संपूर्ण वातावरणाचे वजन आहे. पृथ्वीचे क्षेत्रफळ आहे 510 दशलक्ष वर्ग कि. मी., म्हणजे 51×10^7 वर्ग कि. मी.

आता हे पाहू की पृथ्वीचे क्षेत्रफळ किती वर्ग सें. मी. आहे. एक कि. मी. लांबीच्या सरळ रेषेवर 100 सेंटिमीटर्सचे 1 000 मीटर्स असतात म्हणजेच एका कि. मी. मध्ये 10^5 सें. मी. व एक वर्ग कि. मी. मध्ये $(10^5)^2 = 10^{10}$ वर्ग सें. मी. असतात. या अर्थी पृथ्वीच्या संपूर्ण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ होईल.

$$51 \times 10^7 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17}$$

हे पृथ्वीच्या वातावरणाचे वजन असेल. टनामध्ये रूपांतर करता:

$$51 \times 10^{17} \div 1\,000 = 51 \times 10^{17} \div 10^3 = 51 \times 10^{17-3} = 51 \times 10^{14},$$

पृथ्वीच्या गोळयाचे वजन आहे 6×10^{21} टन.

पृथ्वीच्या गोळा त्यावरील वातावरणापेक्षा कितपट जास्त जड आहे हे ठरविण्यासाठी आपणाला पुढील भागाकार करावा लागेल:

$$6 \times 10^{21} \div 51 \times 10^{14} \approx 10^6,$$

म्हणजेच पृथ्वीवरील हवेचे एकूण वजन पृथ्वीच्या वजनाच्या साधारण पणे दशलक्षपट कमी आहे.*

ज्वाळेशिवाय ज्वलन आणि उष्णता

लाकूड अथवा कोळसा उच्च तपमानासच का जळतो असा प्रश्न जर आपण रसायनशास्त्रज्ञाला विचारला तर तो आपणाला उत्तर देईल की कार्बनडायऑक्साईडचे प्राणवायूशी कोणत्याही तपमानास संयुगीकरण होत असते, परंतु कमी तपमानास ही क्रिया अत्यंत मंदगतीने चालते (म्हणजे अत्यंत कमी संख्येत रेणू प्रक्रियेत भाग घेतात) आणि म्हणूनच ती आपल्या दृष्टीस पडत नाही. रासायनिक प्रक्रियांसंबंधित नियमानुसार तपमानामध्ये 10° से. घट झाल्यास प्रक्रियेच्या वेगात दुप्पट घट होते (म्हणजेच प्रक्रियेत भाग घेणाऱ्या रेणूंच्या संख्येत).

वरील नियम लाकडाच्या ऑक्सीजनबरोबरील संयोगाच्या बाबतीत म्हणजेच लाकूड जळण्याच्या क्रियेच्या बाबतीत कसा काय लागू पडतो ते आता पाहू. असे समजू की 600° से. तपमानाच्या ज्वाळांमध्ये जर दर सेकंदास एक ग्रॅम लाकूड जळत आहे, तर 20° से. तपमानास एक ग्रॅम लाकूड किती वेळ जळेल? आपणाला ठाऊक आहे की $580 = 58 \times 10$ अंशाने कमी असणाऱ्या तपमानास प्रक्रियेचा वेग 2^{58} पटीने कमी असतो, याचा अर्थ असा की एक ग्रॅम लाकूड 2^{58} सेकंदामध्ये जळेल.

जर वर्षांमध्ये हिशेब केला तर हे लाकूड जळण्यास किती वर्षांचा काळ लागेल? 57 वेळा गुणाकार करण्याऐवजी व लॉगरिथम कोष्टकाचा वापर न करता आपणाला हा हिशोब अदमासे असा मांडता येईल: ज्या अर्थी,

$$2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$$

त्या अर्थी,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} \div 2^2 = \frac{1}{4} \times 2^{60} = \frac{1}{4} \times (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \times 10^{18}$$

---

* $\approx$ या चिन्हाचा अर्थ सर्वसाधारणपणे, अदमासे बरोबर.

एका वर्षामध्ये जवळ जवळ 30 दशलक्ष म्हणजे 3×10^7 सेकंद असतात, म्हणून :

$$\left(\frac{1}{4} \times 10^{18}\right) \div (3 \times 10^7) = \frac{1}{12} \times 10^{11} \approx 10^{10}$$

दहा अब्ज वर्षे! ज्वाळा आणि उष्णतेशिवाय एक ग्रॅम लाकूड जळण्यास इतका काळ लागेल. अग्नीच्या साधनांचा शोध लागल्यामुळे या अत्यंत मंदगतीने चालणाऱ्या प्रक्रियाच्या वेगामध्ये अब्जावधी पटीने वाढ झाली.

हवामानातील भिन्नता

आकाश निरभ्र आहे की ढगाळ आहे – केवळ याच एका गोष्टी-वरून आपण हवामान कसे असेल हे ठरविणार आहोत म्हणजेच फक्त स्वच्छ दिवस आणि ढगाळ दिवस वेगवेगळे करावयाचे आहेत. अशा परिस्थितीत हवामानाचे भिन्न विकल्प योग असणाऱ्या आठवड्यांची संख्या पुष्कळ असेल असे आपणाला वाटते काय?

सकृतदर्शनी दिसते की फारच कमी: दोन महिन्यांच्या काळानंतर आठवड्यामधील स्वच्छ आणि ढगाळ दिवसांचे सारे संच समाप्त होतील, तेव्हा या पूर्वीच्या संचापैकी एका संचाची पुनरावृत्ती करावी लागेल.

तथापि, अशा परिस्थितीमध्ये निरनिराळे किती प्रकारचे संच शक्य आहेत याची अचूक मोजणी करू. हा एक असा प्रश्न आहे की जो अनपेक्षितरित्या गणितातील पाचव्या संस्काराकडे – घातकरणाकडे नेतो.

तर, एका आठवड्यामध्ये स्वच्छ आणि ढगाळ दिवस किती प्रकारे आलटून पालटून येऊ शकतील?

उत्तर :

आठवड्याचा पहिला दिवस स्वच्छ असेल किंवा ढगाळ असेल याचा अर्थ दोन "संच" आपल्या हाती आहेत.

दोन दिवसांच्या काळात स्वच्छ आणि ढगाळी दिवस पुढील संचाच्या स्वरूपात येऊ शकतील :

स्वच्छ आणि स्वच्छ
स्वच्छ आणि ढगाळ
ढगाळ आणि स्वच्छ
ढगाळ आणि ढगाळ

एकंदरीत दोन दिवसांच्या काळात 2^2 प्रकारच्या शक्यता संभवतात. तीन दिवसांच्या काळात पहिल्या दोन दिवसांच्या चार संचाच्या शक्यतांमध्ये तिसऱ्या दिवसाच्या दोन संचाची – शक्यतांची भर पडते ; एकूण शक्य संचाची संख्या आता आहे :

$$2^2 \times 2 = 2^3$$

चार दिवसांच्या काळात एकूण शक्य असलेली संचाची संख्या :

$$2^3 \times 2 = 2^4$$

पाच दिवसात 2^5, सहा दिवसात 2^6 आणि शेवटी एका आठवड्यात $2^7 = 128$ भिन्न प्रकारचे संच असू शकतील.

यावरून असे दिसून येते की स्वच्छ आणि ढगाळ दिवसांच्या भिन्न भिन्न क्रमांचे 128 आठवडे असतील. $128 \times 7 = 896$ दिवसानंतर या क्रमांपैकी एखाद्या क्रमाची पुनरावृत्ती होईल, अर्थात ही पुनरावृत्ती पूर्वीही होऊ शकेल, परंतु 896 दिवस ही झाली मर्यादा. यानंतर मात्र पुनरावृत्ती अटळ आहे. आणि याउलट होऊ शकेल, की दोन वर्षांच्या किंवा त्याहूनही अधिक दीर्घ काळ (2 वर्षे आणि 166 दिवस) गेला तरीही एकसारखे हवामान असलेले दोन आठवडे असू शकणार नाहीत.

संकेतबद्ध कुलूप

प्रश्न :

एका सोविएत शैक्षणिक संस्थेमध्ये क्रांतीपूर्वकाळातील धातूचे कपाट सापडून आले. त्याच्या कुलूपाच्या किल्लीचा देखील शोध लागला ;

परंतु किल्लीचा उपयोग करण्यापूर्वी त्या कुलुपाचे रहस्य उलगडणे आवश्यक होते. कपाटाच्या दारावर पाच वर्तुळाकार चक्रे होती आणि त्यांच्या कडेवर 36 मूळाक्षरे होती. एक विशिष्ट शब्द तयार होईल अशा प्रकारे या चक्रांना फिरविल्या नंतरच त्या किल्लीने ते कुलूप उघडले जाई. हा शब्द कोणालाच ठाऊक नसल्यामुळे, तसेच कपाट न तोडता उघडण्याचा निर्णय घेण्यात आल्या कारणाने या चक्रांवरील अक्षरांचे शक्य ते सर्व संच तपासून पाहण्याचे ठरले. जर एक संच तयार करण्यासाठी तीन सेकंद वेळ लागत होता तर दहा दिवसाच्या काळामध्ये ते कपाट उघडले जाईल अशी आशा करता येईल काय?

उत्तर :

सर्वप्रथम हे पाहू की अक्षरांचे किती संच तपासून पहावे लागतील.

पहिल्या चक्रावरील 36 अक्षरांपैकी प्रत्येक अक्षर दुसऱ्या चक्रावरील 36 मधील प्रत्येक अक्षराशी ताडले जाईल. म्हणजेच

$$36 \times 36 = 36^2$$

दोन अक्षरांचे संच संभवतात.

यापैकी प्रत्येक संचामध्ये तिसऱ्या चक्रावरील 36 पैकी कोणत्याही एका अक्षराची भर घालता येईल. म्हणजेच :

$$36^2 \times 36 = 36^3$$

तीन अक्षरांचे संच शक्य आहेत.

अशाच प्रकारे चार अक्षरांचे 36^4 संच शक्य होतील तर पाच अक्षरांचे 36^5 किंवा 60 466 176 संच आपणाला तपासून पाहता येतील. एक संच तपासून पाहण्यास तीन सेकंद लागतात याप्रमाणे हे 60 दशलक्षाहून जास्त संच तपासून पाहण्यास

$$3 \times 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

सेकंद लागतील. याचा अर्थ 50 000 हून जास्त तास किंवा जवळ जवळ 6 300 आठ तासाचे कामाचे दिवस (20 हून जास्त वर्षे) हे कपाट उघडण्यासाठी खर्च करावे लागतील.

म्हणजेच दहा दिवसांमध्ये कपाट उघडले जाण्याची संभाव्यता 6 300 : 10 किंवा 1/630 असेल — जवळ जवळ नाहीच.

अंधश्रद्धाळू सायकलस्वार

प्रश्न :

एक काळ असा होता की आज मोटार गाड्यांना जसा क्रमांक दिला जातो तसा एक क्रमांक सायकलला दिला जात असे. हे क्रमांक सहाअंकी असत.

अशाच एका व्यक्तीने एक सायकल खरेदी केली. ह्या सायकलीचा मालक भलताच अंधश्रद्धाळू होता. सायकलीला देण्यात येणाऱ्या क्रमांकामध्ये जर 'आठ' हा अंक असेल तर ती सायकल सायकलस्वाराला अपशकुनी ठरते असा एक समज होता म्हणून आपल्याला मिळणाऱ्या सायकलीच्या क्रमांकामध्ये 'आठ' हा अंक एकदा जरी असला तरी आपणास यश मिळणार नाही असे त्याला वाटत होते. तथापि जेव्हा तो क्रमांक घ्यावयास गेला तेव्हा त्याने स्वतःची समजूत अशी घातली: प्रत्येक क्रमांकामध्ये दहा अंक भाग घेतात : 0, 1, ..., 9. त्यांपैकी केवळ 8 हा अंक "अपशकुनी" आहे. म्हणून "अपशकुनी" क्रमांक मिळण्याची संभाव्यता दहामध्ये फक्त एकच आहे.

त्याची ही समजूत योग्य होती काय?

उत्तर :

एकूण क्रमांक होते 999 999; 000 001, 000 002 इ. पासून 999 999 पर्यंत. यापैकी किती क्रमांक शकुनी होते ते पाहू. सर्वप्रथम, पहिल्या स्थानावर 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 यापैकी कोणताही "शकुनी" अंक असू शकतो. दुसऱ्या स्थानावर सुद्धा या नऊ अंकांपैकी कोणताही अंक असू शकेल. म्हणून $9 \times 9 = 9^2$ "शकुनी" दोन अंकाचे संच उपलब्ध होतात. यापैकी प्रत्येक संचामध्ये (तिसऱ्या स्थानावर) वरील नऊ अंकापैकी कोणत्याही एका अंकाची भर घालता

येते म्हणजेच तीन अंकी शकुनी $9^2 \times 9 = 9^3$ संच शक्य आहेत.

या प्रकारे आपणाला आढळून येते की सहाअंकी शकुनी संचांची संख्या आहे 9^6. तथापि, या ठिकाणी एक गोष्ट ध्यानात घेतली पाहिजे की 000 000 हा संच देखील या संख्येत अंतर्भूत असून सायकलीचा क्रमांक म्हणून त्यांचा काहीही उपयोग नाही. अशाप्रकारे $9^6 - 1 = = 531\,440$ क्रमांक शकुनी म्हणून समजले जातील. ही संख्या एकूण क्रमांकांच्या 53% भरते, सायकलस्वाराने विचार केल्याप्रमाणे 90% नाही.

येथे एक गोष्ट वाचकांच्या ध्यानी आणून द्यावीशी वाटते की जर आपण सात अंकी क्रमांकांमधून शकुनी आणि अपशकुनी क्रमांकांचा शोध घेतला तर अपशकुनी क्रमांकांची संख्या शकुनी क्रमांकांपेक्षा जास्त भरते.

गुणवृद्धीचे फल

एखाद्या अत्यंत छोटया संख्येचा त्याच संख्येशी पुनःपुन्हा गुणाकार करीत गेल्यास त्याच्या फळामध्ये अत्यंत तीव्रपणे वाढ होत जाते. याचे एक उत्कृष्ट उदाहरण म्हणजे बुद्धिबळाच्या जनकास देण्यात आलेल्या बक्षिसाविषयीची दंतकथा.* तथापि, या दंतकथे व्यतिरिक्त इतर अनेक उदाहरणे मी आता देत आहे.

प्रश्न :

इनफ्यूसोरियाचे प्रत्येक 27 तासांमध्ये (सरासरी) दोन भागात विभाजन होते. जर अशा प्रकारे जन्मास येणारे सर्व इनफ्यूसोरिया जिवंत राहिले तर सूर्याच्या आकारमानाइतके आकारमान पूर्णपणे व्यापण्यास इनफ्यूसोरियाना किती वेळ लागेल?

हिशेब मांडण्यासाठी उपयोगी पडणारी काही आकडेवारी अशी :

---

* माझ्या "हसत खेळत गणित" या पुस्तकात ही गोष्ट आहे. हे पुस्तक मराठी भाषेत उपलब्ध आहे. — सं.

विभाजनानंतर जिवंत राहणाऱ्या इनफ्यूसोरियाची 40 वी पिढी एक घन मीटर आकारमान व्यापते ; सूर्याचे आकारमान आहे 10^{27} घन मीटर.

उत्तर :

10^{27} घन मीटर इतके आकारमान मिळविण्यासाठी एक घन मीटरचा किती वेळा गुणाकार करावा लागेल हे ठरविण्याच्या दिशेने या प्रश्नाचा रोख आहे.

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90},$$

कारण $2^{10} \approx 1\,000$.

याचा अर्थ असा की सूर्याइतके आकारमान प्राप्त करण्यासाठी नाळीसाव्या पिढीचे आणखी 90 वेळा पुनरुत्पादन व्हावयास हवे. म्हणजे एकूण सुरुवातीपासूनच्या पिढ्यांची संख्या $40 + 90 = 130$ इतकी होईल. ज्या अर्थी एक पिढी 27 तासात तयार होते त्या अर्थी 130 पिढ्या निर्माण होण्यास 147 दिवस लागतील.

येथे एक गोष्ट नमूद करावी लागेल की एका सूक्ष्मजीवशास्त्रज्ञाने इनफ्यूसोरियाच्या 8 061 विभाजनांचे निरीक्षण केले आहे. आता या इनफ्यूसोरियाच्या शेवटच्या पिढीचा अंत झाला नसता तर त्यांनी किती आकारमान व्याप्त केले असते याची खुद्द वाचकांनीच कल्पना करावी . . .

वरील गोष्टीचा खुलासा उलटया पद्धतीने देखील करता येतो :

अशी कल्पना करू की आपल्या सूर्याचे दोन समान भागात आणि या अर्ध्याभागांचे पुन्हा दोन समान भागात अशा प्रकारे विभाजन होत गेले, तर इनफ्यूसोरियाच्या आकारमानाइतके छोटे छोटे तुकडे होण्यासाठी सूर्याचे किती विभाजन व्हावे लागेल ?

130 हे उत्तर आमच्या वाचकांना ठाऊक असले तरी देखील दुसऱ्या प्रकारे प्रश्न मांडल्यानंतर उत्तर देताना त्यांची काहीशी कुचंबणाच होईल. कारण विश्वास बसू शकणार नाही इतकी ही संख्या छोटी आहे (सूर्याचे आकारमान ध्यानात घेता).

कोटचवधी पट अधिक वेगाने

विद्युतचाप नावाच्या विद्युत उपकरणामध्ये दोन खास विद्युत दिवे असतात.* रेडिओमध्ये वापरल्या जाणाऱ्या दिव्याप्रमाणे चापामध्ये विद्युत प्रवाह फक्त एकाच दिव्यामधून – डाव्या किंवा उजव्या – जाऊ शकतो. चापामध्येच असलेल्या दोन स्पर्शबिंदूमध्ये बाहेरून अल्पकालीन विद्युत संदेश (स्पंद) धाडता येतात आणि दुसऱ्या दोन स्पर्शबिंदूंमधून चापातून बाहेर पडणारे प्रत्युत्तरात्मक स्पंद वाहून नेले जातात. बाहेरून विद्युत स्पंद मिळताच चाप कार्यवत होतो: ज्या दिव्यामधून विद्युत-प्रवाह गेलेला असतो तो दिवा बंद होतो, त्यानंतर विद्युत-प्रवाह दुसऱ्या दिव्यामधून जाऊ लागतो. ज्या क्षणी उजवीकडील दिवा बंद होऊन डावीकडील दिवा लागतो त्या क्षणीच चापाकडून प्रत्युत्तरात्मक स्पंद धाडले जाऊ लागतात.

जर चापाकडे एका पाठोपाठ एक विद्युत स्पंद धाडण्यात आले तर चापाचे कार्य कसे चालेल ते आता आपण पाहू या. सर्वप्रथम उजवी-कडील दिव्याच्या संदर्भात चापाची परिस्थिती कशी असते ते पाहू: जर उजवीकडील दिव्यामधून विद्युतप्रवाह जात नसेल तर असे समजू की चापाची स्थिती "0" आहे आणि उलट, जर तो उजवीकडील दिव्यामधून जात असेल तर चापाची स्थिती "1" असेल.

समजा सुरुवातीस चापाची स्थिती "0" होती म्हणजेच डावीकडील दिव्यामधून विद्युतप्रवाह वहात होता (आकृती 1). पहिल्या स्पंदा-नंतर विद्युतप्रवाह उजवीकडील दिव्यामधून वाहू लागेल म्हणजेच चाप "1" स्थितीस येईल. या वेळी चापाकडून प्रत्युत्तरात्मक स्पंद धाडले जात नाहीत, कारण उजवीकडील दिवा बंद होता क्षणीच प्रत्त्युतरात्मक संदेश धाडले जातात.

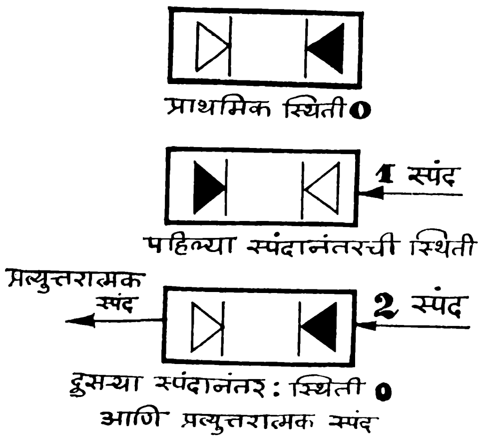
दुसऱ्या स्पंदानंतर विद्युतप्रवाह डावीकडील दिव्यामधून वाहू लागेल,

---

* विद्युत दिव्यांच्या ऐवजी ट्रँझिस्टर्स बऱ्याच वेळा वापरले जातात. त्यामुळे विशेष फरक पडत नाही.

म्हणजेच चाप पुन्हा "0" स्थितीस येईल. तथापि, या स्थितीत चाप प्रत्युत्तरात्मक संदेश (स्पंद) पाठवू लागेल.

परिणामी (दोन स्पंदानंतर) चाप पुन्हा सुरुवातीच्या पूर्वस्थितीस येईल. म्हणूनच तिसऱ्या स्पंदानंतर (पहिल्या स्पंदाप्रमाणे) चाप "1" स्थितीस येईल. आणि चौथ्या स्पंदानंतर (दुसऱ्या स्पंदाप्रमाणेच) "0" स्थितीस येत असतानाच प्रत्युत्तरात्मक संदेश धाडेल. प्रत्येक दोन स्पंदानंतर चापाच्या स्थितीत पुनरावृत्ती होईल.

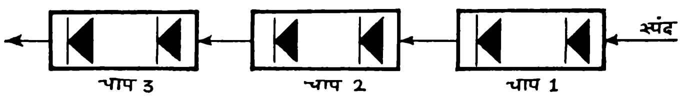


आकृती 1

आता असे समजू की अनेक चाप आहेत व बाहेरून स्पंद पहिल्या चापाकडे धाडला जातो. पहिल्या चापाने दिलेला प्रत्युत्तरात्मक संदेश दुसऱ्या चापास प्राप्त होतो, दुसऱ्या चापाचा प्रत्युत्तरात्मक संदेश तिसऱ्या चापाकडे धाडला जातो, अशा प्रकारे ही क्रिया पुढे चालू राहते (आकृती क्र. 2 मध्ये चापांची उजवीकडून डावीकडे मांडणी केल्याचे दिसत आहे). अशा या चापांच्या मालिकेचे काम कसे चालते ते आता पाहू या.

सुरुवातील सर्व चाप "0" स्थितीत आहेत असे समजू. उदाहरणार्थ, पाच चापांपासून बनलेल्या मालिकेमध्ये आपणाला 0000 हा संच

दिसतो. पहिल्या स्पंदानंतर अगदी उजवीकडील पहिला चाप "1" स्थितीस येतो; तर प्रत्युत्तरात्मक आदेश नसल्याकारणाने इतर सर्व चाप "0" स्थितीत रहातील म्हणजेच 00001 हे मालिकेचे स्वरूप असेल. दुसऱ्या स्पंदानंतर पहिल्या चापाचे कार्य समाप्त होईल, तो पूर्वस्थितीस ("0" स्थितीस) येईल, परंतु प्रत्युत्तरात्मक संदेश धाडला जाईल व त्यामुळे दुसरा चाप कार्यवत होईल. इतर चाप "0" स्थितीत रहातील. म्हणजेच मालिकेचे आताचे स्वरूप असेल 00010.



आकृती 2

तिसऱ्या स्पंदानंतर पहिला चाप पुन्हा कार्यवत होईल परंतु इतर चाप पूर्वस्थितीत रहातील. यामुळे मालिकेचे स्वरूप बदलून 00011 असे होईल. चौथ्या स्पंदानंतर पहिल्या चापाचे काम बंद होईल, प्रत्युत्तरात्मक संदेश धाडला जाईल, परिणामी दुसऱ्या चापाचे काम बंद होऊन त्याद्वारे देखील प्रत्त्युत्तरात्मक संदेश धाडला जाईल व शेवटी या शेवटच्या स्पंदामुळे तिसरा चाप कार्यवत होईल, व आपणास मालिकेची 00100 ही स्थिती दिसेल.

ही क्रिया अशाच प्रकारे पुढे चालू राहिल्यास मालिकेचे स्वरूप आपणाला पुढीलप्रमाणे आढळून येईल :

स्पंद (क्रमवार)	मालिकेचे स्वरूप
1	00001
2	00010
3	00011
4	00100
5	00101
6	00110
7	00111
8	00000

वरील कोष्टकावरून आपणाला असे दिसून येते की चापांची मालिका बाहेरून प्राप्त होणाऱ्या संदेशांची "मोजणी" करते आणि एका विशिष्ट पद्धतीने या संदेशांची "नोंदणी" करते. या ठिकाणी नोंदणी करण्याची पद्धत नेहमीप्रमाणे 1, 2, 3, 4... 18, 19... अशी नसते, तर पुढील प्रकारे असते :

या पद्धतीनुसार प्रत्येक संख्या शून्य आणि एककाच्या स्वरूपात मांडली जाते. नेहमीच्या पद्धतीमध्ये उजवीकडून डावीकडे एकक, दशक, शतक... अशा प्रकारे संख्या मांडली जाते म्हणजेच दहा पटीने वाढत जाते. परंतु या पद्धतीमध्ये ती केवळ दुपटीने वाढत जाते. अगदी उजवीकडे असलेले एकक प्रत्यक्षात 1 ही संख्या असते त्या पुढील (उजवीकडून दुसरी) एकक म्हणजे 2 ही संख्या असते, त्यानंतरची 4, नंतरची 8 अशा प्रकारे त्यांची मांडणी असते.

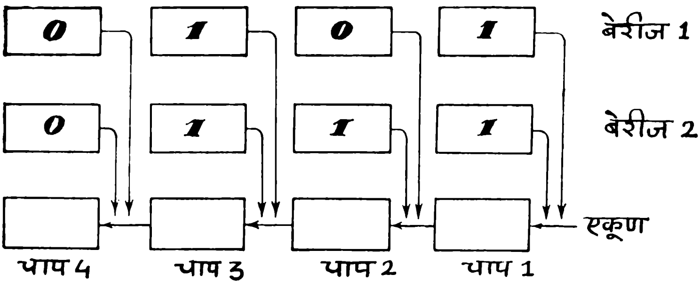
उदाहरणार्थ $19 = 16 + 2 + 1$ ही संख्या वरील पद्धतीनुसार 10011 अशा प्रकारे मांडली जाईल $(16 + 0 + 0 + 2 + 1)$.

या ठिकाणी एका गोष्टीचा उल्लेख करणे जरूरी आहे. एखाद्या ...ीत म्हणजेच एका स्पंदाच्या प्रवेशाच्या वेळी चाप एक अब्जांश ...ाइतकाच कार्य करतो! आधुनिक मापन यंत्रे एका सेकंदामध्ये ... कोटी स्पंदांची नोंदणी करू शकतात. कोणत्याही यंत्राच्या ...शिवाय मनुष्य लावत असलेल्या हिशोबापेक्षा हे लाखो पटीने जलद ... होते.

मनुष्याचे डोळे 0.1 सेकंदापेक्षा अधिक जलद गतीने एकामागून ... येणारे सिग्नल स्पष्टपणे पाहू शकत नाहीत. एका सेकंदामध्ये ...वधी सिग्नल मोजण्याचे सामर्थ्य असलेली उपकरणे परमाणू भौतिकशास्त्रातील प्रायोगिक कामामध्ये अत्यंत जरूरी आहेत. उदाहरणार्थ परमाणूचे विघटन होत असताना विविध प्रकारचे ... उडत असतात त्यांची संख्या मोजता येणे अशा उपकरणाद्वारे ... होते.

चापांच्या वरील मालिकांच्या साहाय्याने संख्यांवर अनेक संस्कार करता येतात. आता आपण दोन संख्यांची बेरीज कशी करता येईल ते पाहू.

चापांच्या तीन मालिका आकृती क्रमांक ३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे जोडू.



आकृती 3

सर्वात वरील मालिका पहिल्या टप्प्याची बेरीज करेल, तर दुसरी मालिका दुसऱ्या टप्प्याची, तिसरी, सर्वात खालची मालिका आपणाला एकूण बेरीज सांगेल. उपकरण सुरू करताच खालच्या मालिकेतील चापांमध्ये वरच्या आणि मधल्या मालिकेतील 1 स्थितीत असलेल्या चापांमधून स्पंद येऊन पोहोचतील.

आकृती क्र. ३ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे पहिल्या दोन मालिकांमध्ये यापूर्वी पाहिलेल्या पद्धतीनुसार 101 आणि 111 अशा बेरजांची नोंद करण्यात आलेली आहे. खालच्या मालिकेमधील पहिल्या (अगदी उजवीकडील) चापामध्ये (उपकरण सुरू करताच) दोन स्पंद येतात: आपणाला आता ठाऊक आहे की प्रत्येक टप्प्यावरील पहिल्या चापां-मधून दोन स्पंद असल्यामुळे पहिला चाप 0 स्थितीतच राहतो; किंबहुना दुसऱ्या चापाकडे प्रत्युत्तरात्मक संदेश धाडतो. याव्यतिरिक्त दुसऱ्या भागाकडून दुसऱ्या चापाला संदेश प्राप्त होतो. अशा प्रकारे

दुसऱ्या चापाकडे दोन स्पंद धाडले जातात, ज्यामुळे हा चाप "0" स्थितीस येतो आणि तिसऱ्या चापाच्या दिशेने प्रत्युत्तरात्मक स्पंद धाडतो. याशिवाय तिसऱ्या चापाला आणखी दोन (प्रत्येक भागाकडून एक याप्रमाणे) स्पंद मिळतात. तीन संदेश प्राप्त झाल्या कारणाने तिसरा चाप "1" स्थितीस येऊन प्रत्युत्तरात्मक संदेश धाडतो. या प्रत्युत्तरात्मक संदेशाचा परिणाम म्हणजे चौथा चाप "1" स्थितीस येतो (चौथ्या चापाला इतर संदेश मिळत नाहीत). अशा प्रकारे आकृती क्र. 3 मध्ये दाखविलेल्या उपकरणाने (वर उल्लेखिलेल्या मोजणी पद्धतीनुसार) स्तंभरूपात दोन संख्यांची बेरीज पुढील प्रमाणे होईल :

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\,111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

किंवा साध्या स्वरूपात: $5 + 7 = 12$. ज्याप्रमाणे आपण स्तंभ रूपात सर्वसाधारण बेरीज करतो (उदा. हातचा घेणे) त्याप्रमाणे खालच्या मालिकेतील चापांचे प्रत्युत्तरात्मक स्पंद म्हणजे जणू काही उपकरण एक एकक आपल्या ध्यानात ठेवते आणि पुढील अंकात जमा करते.

जर प्रत्येक मालिकेमध्ये 4 च्या ऐवजी 20 चाप असले असते तर दक्षलक्षाच्या मर्यादेत संख्यांची बेरीज करता आली असती. चापांची संख्या आणखी वाढविल्यास या संख्यांहून जास्त संख्यांची बेरीज करता येईल.

या ठिकाणी एका गोष्टीचा उल्लेख करावा लागेल की बेरीज करणारे अशा प्रकारचे उपकरण अथवा यंत्र तयार करावयाचे झाल्यास त्याची रचना मात्र आकृती क्र. 3 च्या तुलनेने अधिक गुंतागुंतीची असेल. तसेच या यंत्रामध्ये उशीरा येणाऱ्या संदेशांची नोंद करणाऱ्या नियोजित रूपरेखेनुसार दोन्ही भागांकडून येणारे संदेश एकाच वेळी (उपकरण सुरू करताक्षणीच) खालच्या मालिकेतील पहिल्या चापास प्राप्त होतात. परिणामी दोन्ही संदेश एकमेकात मिसळले जातात आणि चापास ते दोन नव्हे तर एका संदेशाच्या स्वरूपात प्राप्त होतात. असे

होऊ नये यासाठी दोन्ही भागांकडून येणारे संदेश एकाच वेळी न येता काही अंतराने, एक संदेश दुसऱ्या संदेशापेक्षा थोडासा उशीरा यावयास हवा. यामुळे चापामध्ये येणाऱ्या एका संदेशाच्या नोंदणीसाठी लागणाऱ्या वेळेपेक्षा जास्त वेळ दोन संख्यांची बेरीज करण्यासाठी लागतो.

वरील उपकरणाच्या रचनेमध्ये थोडाफार बदल करून इतर गणिती क्रिया (गुणाकार, भागाकार इत्यादी) करण्यासाठी त्याचा वापर करता येईल.

अशा प्रकारची उपकरणे आधुनिक गणकयंत्रांमध्ये वापरली जातात. ही यंत्रे एका सेकंदामध्ये हजारो, लाखो गणिती क्रिया करू शकतात. एका सेकंदामध्ये कोटचवधी क्रिया करून दाखविणाऱ्या गणकयंत्राचा जन्म लौकरच होईल यात शंकाच नाही. सकृतदर्शनी असे वाटेल की गणिती क्रिया करण्याची एवढी कल्पनातीत गती काय कामाची? पंधरा अंकी संख्येचा वर्ग काढण्यासाठी अशा प्रकारच्या यंत्राला किती वेळ लागतो हे जाणून घेऊन काय साधले जाईल? पंधरा अंकी संख्येचा वर्ग काढण्यासाठी या यंत्राला एक दहा हजारांश सेकंद लागतील किंवा पाव सेकंद लागेल. दोन्हीही उत्तरे आपणास एका क्षणात मिळाल्यासारखे वाटते. तथापि, यातून एखादा निष्कर्ष काढण्याची घाई करू नका. अनुभवी बुद्धिबळपटू एखादी चाल करण्यापूर्वी शेकडो शक्य चालींचा विचार करतो. समजा, जर एका शक्य चालीवर विचार करण्यास काही सेकंद खर्च होत असतील, तर शेकडो चालींवर विचार करण्यासाठी कित्येक मिनिटे खर्च करावे लागतील. अनेकदा विचार करण्यावर बराच वेळ खर्च केल्यामुळे खेळाडूला चाल झट्कन करावी लागते. जर हे योग्य चाल शोधून काढण्यासाठी विचार करण्याचे काम यंत्रावर सोपवले तर? सेकंदात हजारो क्रिया पार पाडणारे यंत्र एका क्षणात शेकडो चालींवर विचार करू शकेल.

या वेळी आपण नक्कीच विचार करीत असाल की बेरीज, गुणाकार इ. क्रिया पार पाडणे वेगळे आणि बुद्धिबळाचा खेळ खेळणे वेगळे. यंत्र हे काम करू शकणार नाही! आपली ही शंकादेखील साधार आहे. खेळाडू बुद्धिबळ खेळताना शक्य चाली मोजत नाही तर त्यावर विचार करतो. तूर्त आपण या मुद्द्यावर वाद घालणार नाही. पुन्हा आपण त्याकडे वळू.

बुद्धिबळाच्या खेळातील शक्य चाली

बुद्धिबळाच्या खेळामध्ये शक्य असणाऱ्या निरनिराळ्या चालींची संख्या मोजण्याचा थोडासा प्रयत्न आता करू. अर्थात आपणाला अचूक संख्या मोजता येणे शक्य नाही तरी सुद्धा अंदाजे कशा प्रकारे ही मोजणी करता येईल ते पाहू. एका बेल्जीयम गणितशास्त्राच्या पुस्तका-मध्ये पुढील प्रकारे मोजणी करण्यात आलेली आहे :

"अगदी पहिलीच चाल चालताना पांढऱ्या रंगाचे सैन्य असणाऱ्याला 20 प्रकारे पहिली चाल करता येणे शक्य असते (आठ प्यादांच्या 16 चाली, प्रत्येक प्यादे एक किंवा दोन घरे पुढे जाऊ शकते आणि प्रत्येक घोड्याच्या दोन-दोन चाली). पांढऱ्या रंगाचे सैन्य असणाऱ्याच्या पहिल्या चालीला उत्तर म्हणून काळ्या रंगाच्या 20 संभावित चाली होऊ शकतील. काळ्या रंगाच्या प्रत्येक चालीशी अनुरूप अशा $20 \times 20 = 400$ पांढऱ्या रंगाच्या चाली दोन्ही पक्षांच्या पहिल्या चालीनंतर होऊ शकतील.

पहिल्या चालीनंतर शक्य चालींच्या संख्येमध्ये वाढ होते. उदाहरणार्थ, जर पांढऱ्या रंगाची पहिली चाल e2 — e4 अशी केली तर दुसऱ्या चालीसाठी त्यांना 29 चालींमधून निवड करता येईल. त्यानंतर शक्य चालींच्या संख्येमध्ये पुन्हा वाढ होत जाईल. उदाहरणार्थ, d5 स्थितीत जर वजीर असेल तर केवळ त्याला 27 चालींमधून आपली चाल निवडता येईल (या ठिकाणी आपण असे समजू की ज्या ठिकाणी तो जाऊ शकतो त्या जागा रिकाम्या आहेत). तथापि, आपली मोजणी अधिक सोपी व्हावी यासाठी आपण पुढील सरासरी संख्या ध्यानात घेऊ :

पहिल्या पाच चालींमध्ये दोन्ही पक्षांसाठी प्रत्येकी 20 शक्य चाली ;

पुढील चालींमध्ये दोन्ही पक्षांसाठी प्रत्येकी 30 शक्य चाली.

सर्वसाधारण डावामध्ये चालींची सरासरी संख्या 40 आहे असे मानू. या अर्थी शक्य डावांची संख्या काढण्यासाठी आपणाला पुढील समीकरणाची मदत घ्यावी लागेल :

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}$$ ".

वरील समीकरणाची अंदाजे किंमत काढण्यासाठी आपण या समीकरणाची पुढील प्रकारे पुनर्रचना करू:

$$(20\times20)^5\times(30\times30)^{35}=20^{10}\times30^{70}=2^{10}\times3^{70}\times10^{80}$$

2^{10} च्या जागी त्या जवळचीच 1 000 म्हणजेच 10^3 ही संख्या वापरू. 3^{70} ही संख्या आपणाला पुढील प्रकारे मांडता येईल:

$$3^{70}=3^{68}\times3^2\approx10(3^4)^{17}\approx10\times80^{17}=10\times8^{17}\times10^{17}=$$
$$=2^{51}\cdot10^{18}=2(2^{10})^5\cdot10^{18}\approx2\cdot10^{15}\cdot10^{18}=2\cdot10^{33}$$

म्हणून,

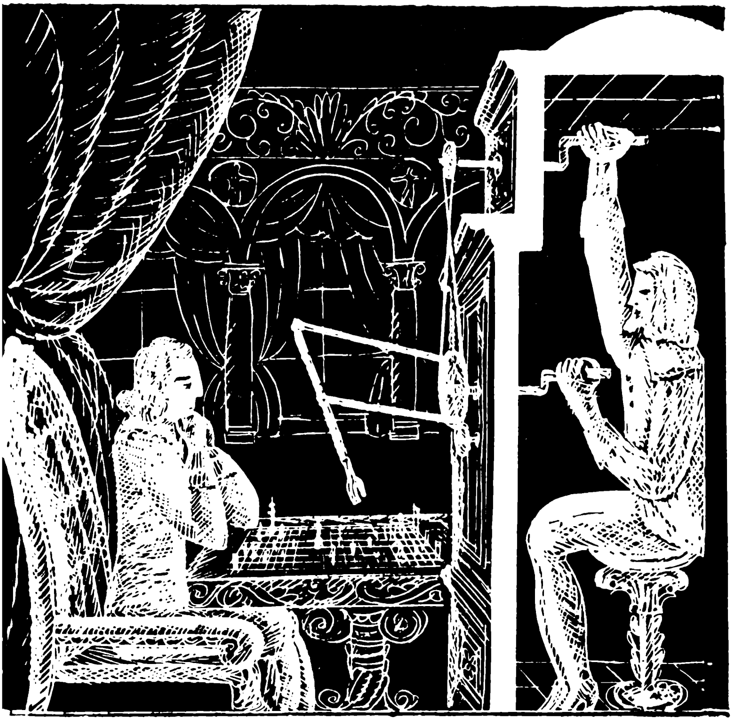
$$(20\times20)^5\times(30\times30)^{35}\approx10^3\times2\times10^{33}=2\times10^{116}$$

इतक्या चाली चालण्यासाठी पृथ्वीवरील सर्व रहिवाश्यांनी एका सेकंदास एक चाल याप्रमाणे रोज 24 तास अविरतपणे बुद्धिबळ खेळल्यास कमीत कमी 10^{100} इतकी शतके बुद्धिबळ खेळावे लागेल!

स्वयंचलित बुद्धिबळाचे रहस्य

आपणाला हे ऐकून नवल वाटेल की कोणे एके काळी स्वयंचलित बुद्धिबळे होती. खरोखरच, बुद्धिबळाच्या पटावरील स्थितीची अमर्याद संख्या असताना या गोष्टीवर कसा विश्वास ठेवायचा?

वस्तुस्थिती अशी होती की अशा प्रकारची स्वयंचलित बुद्धिबळे नव्हे तर केवळ त्या संबंधीची विश्वासाची भावना अस्तित्वात होती. वोल्फगांग फॉन केम्पेलेन (१७३४-१८०४) या हंगेरियन तंत्रज्ञाचे अशा प्रकारचे स्वयंचलित यंत्र विशेष प्रसिद्ध झाले होते. ऑस्ट्रिया आणि रशियातील राजांच्या राजवाड्यामध्ये त्याने प्रथम आपले हे यंत्र दाखविले आणि मग पॅरिस व लंडन येथे त्याने या यंत्राचे जाहीर प्रदर्शन केले. या यंत्रावर मात करण्यासाठी पहिला नेपोलियन देखील त्याबरोबर डाव खेळला होता. गेल्या शतकाच्या मध्यंतरी हे प्रसिद्ध स्वयंचलित यंत्र अमेरिकेस नेण्यात आले व फिलाडेल्फीया येथे लागलेल्या एका आगीमध्ये या यंत्राचे अस्तित्व नाहीसे झाले.



आकृती 4

इतर स्वयंचलित बुद्धिबळांना फारशी लोकप्रियता मिळाली नाही. तथापि, अशा प्रकारच्या यंत्राच्या अस्तित्वावरील विश्वास काही नष्ट होऊ शकला नाही.

खरे पहाता एकही बुद्धिबळयंत्र स्वयंचलितपणे काम करू शकत नव्हते. या यंत्राच्या आत एक पट्टीचा बुद्धिबळपटू लपून बसलेला असे आणि तोच चाली चालत असे. ज्या बुद्धिबळयंत्राविषयी आपण आता चर्चा करीत होतो ते एका मोठ्या पेटीसारखे असे व त्यावर पट आणि बुद्धिबळातील सैन्य असे, आत बरीच गुंतागुंतीची यंत्रणा असे व एका छोट्या बाहुलीचा हात पटावरील सैन्याची हालचाल करीत असे. प्रत्येक डावाच्या प्रदर्शनापूर्वी लोकांना या पेटीच्या आत कोणतीही

व्यक्ती बसलेली नसून फक्त यंत्रणाच आहे याची खात्री करून घेण्याची संधी देण्यात येत असे. तथापि, एक सर्वसाधारण शरीरयष्टीची व्यक्ती लपून बसू शकेल इतपत जागा रिकामी असे (एके काळी सुप्रसिद्ध बुद्धिबळपटू योगान एल्गायर आणि विल्यम लुईस या ठिकाणी बसून खेळत असत). कदाचित प्रेक्षकांना जेव्हा पेटी दाखविली जात असे तेव्हा खेळाडू शेजारच्या दालनात लपून बसत असावा. खेळाचा आणि यंत्राचा सुतराम संबंध नव्हता.

आपल्या वरील संपूर्ण विवेचनावरून एक निष्कर्ष काढता येईल: बुद्धिबळाच्या डावामध्ये शक्य चालींची संख्या अमर्याद असून कोणत्याही प्रकारची स्वयंचलित यंत्रे अस्तित्वात नाहीत. त्यांचे अस्तित्व फक्त आपल्या विचारांमध्ये आहे.

तथापि गेल्या काही वर्षांमध्ये आपल्या निष्कर्षाच्या खरेपणाबद्दल शंका निर्माण झाली आहे: आज बुद्धिबळ खेळणारी यंत्रे अस्तित्वात आहेत. या यंत्रांची रचना अतिशय गुंतागुंतीची असून एका सेकंदामध्ये कित्येक हजार गणिती संस्कार करण्याची त्यांची क्षमता आहे. या यंत्रांसंबंधी आपण यापूर्वी चर्चा केली आहेच. परंतु एखादे यंत्र बुद्धिबळ खेळते तरी कसे?

अर्थातच, एखाद्या संख्येवर गणिती संस्कार करण्याखेरीज इतर कोणतीही क्रिया गणकयंत्र करू शकत नाही. परंतु ठराविक साच्यानुसार, पूर्वनियोजित कार्यक्रमानुसार गणकयंत्र हे गणिती संस्कार पार पाडीत असते.

गणकयंत्रांसाठी बुद्धिबळाचा कार्यक्रम तयार करीत असताना गणितज्ञ या खेळातील डावपेचांचा आधार घेत असतात. असा कार्यक्रम तयार करीत असताना प्रत्येक परिस्थितीमध्ये एकच चाल निवडली जाईल (डावपेचाच्या दृष्टीने सर्वात चांगली) या नियमाचे काटेकोरपणे पालन केले जाते. अशाच एका डावपेचाचे उदाहरण पहा. बुद्धिबळाच्या सैन्यामधील प्रत्येकास ठराविक गुण दिले गेलेले असतात:

राजा	+ 200 गुण
वजीर .	+ 9 गुण
उंट	+ 5 गुण
हत्ती	+ 3 गुण
घोडा .	+ 3 गुण
प्यादे	+ 1 गुण
मागे पडलेले प्यादे	— 0.5 गुण
एकाकी पडलेले प्यादे .	— 0.5 गुण

त्याशिवाय ठराविक पद्धतीने स्थानांनुसार प्रत्येक सैन्याला गुण दिले जातात. पांढऱ्या सैन्याच्या एकूण गुणांमधून काळ्या सैन्यांची एकूण गुणसंख्या वजा केली जाते. दोन्ही गुणसंख्यांमध्ये असलेला फरक पांढऱ्या सैन्यांचे काळ्यांवर असलेले वर्चस्व दर्शवितो. जर हा फरक अनुकूल असेल तर याचा अर्थ असा की पांढऱ्या सैन्याची स्थिती काळ्या सैन्याच्या तुलनेने अधिक बळकट आहे. आणि जर फरक प्रतिकूल असेल तर याउलट.

हा फरक पुढील तीन चालींमध्ये कशा प्रकारे बदलता येईल याचा हिशोब गणकयंत्र करते व शक्य चालींमधून पुढील तीन अत्यंत फायदेशीर चालींची निवड करून एका विशिष्ट कागदी कार्डावर नोंद करते : 'चाल करण्यात आली आहे.'* एका चालीवर गणकयंत्र अत्यंत कमी वेळ खर्च करते. तथापि ही बाब कशा प्रकारे कार्यक्रम बनविला गेला आहे यावर आणि यंत्राच्या कार्यक्षमतेवर अवलंबून असते.

अर्थात पुढील केवळ तीन चालींचाच अंदाज घेत असल्यामुळे गणकयंत्राची गणना उत्कृष्ट खेळाडूंमध्ये करता येत नाही** परंतु येत्या

---

*बुद्धिबळात दुसऱ्या प्रकारचे डावपेचदेखील अस्तित्वात आहेत. उदाहरणार्थ, गणकयंत्र सर्व प्रत्युत्तरात्मक चाली ध्यानात घेते व त्यामधून फक्त अधिक प्रबळ चालींची निवड करते (शह, हल्ला, बचाव, मात वगैरे) त्यानंतर प्रतिस्पर्ध्याच्या जोरदार चालींना प्रत्युत्तर म्हणून केवळ तीनच नव्हे तर पुढील अनेक चालींची निवड गणकयंत्र करते.

**पुढील 20 किंवा अधिक चालींची निवड करणारा खेळाडू बुद्धिबळामध्ये उत्कृष्ट खेळाडू म्हणून मानला जातो.

काही काळात ही यंत्रे उत्कृष्टपणे बुद्धिबळ खेळावयास शिकतील यात मुळीच शंका नाही.

अशा प्रकारच्या कार्यक्रमांचा सविस्तर अभ्यास आपणाला या पुस्तकामध्ये करता येणार नाही, तथापि, काही साध्या कार्यक्रमांविषयी आपण पुढील प्रकरणामध्ये चर्चा करू.

तीन 'दोन'

जास्तीत जास्त मोठी संख्या व्यक्त करण्यासाठी तीन अंक कशा प्रकारे लिहावेत हे कदाचित सर्वांना ठाऊक असेल. तीन 'नऊ' घेऊन त्यांची मांडणी पुढील प्रकारे करावी :

$$9^{9^9}$$

म्हणजेच 9 या संख्येचा तिसरा घातांक लिहावयाचा.

ही संख्या इतकी प्रचंड असेल की तिचे स्वरूप जाणून घेण्यासाठी कोणतीही, कशाचीही तुलना आपणाला मदत करू शकणार नाही. आपल्या दृष्टिक्षेपात असलेल्या संपूर्ण अवकाशातील एकूण इलेक्ट्रॉन्सची संख्या देखील या संख्येपुढे नगण्य आहे.

तीन 'दोन'च्या साहाय्याने कोणतेही गणिती चिन्ह न वापरता मोठी संख्या मांडता येते.

वरील '9' या अंकाच्या मांडणीकडे पाहून मोठी संख्या व्यक्त करण्यासाठी आपण नक्कीच 'दोन'ची पुढील प्रकारे मांडणी कराल :

$$2^{2^2}$$

तथापि, या ठिकाणी आपणाला हवा असलेला परिणाम साधता येत नाही. या मांडणीद्वारे प्राप्त होणारी संख्या काही मोठी नाही. 222 या संख्येपेक्षा लहान आहे. प्रत्यक्षात आपण फक्त 2^4 म्हणजे 16 हीच संख्या लिहिली.

खरे पाहता तीन 'दोन' च्या साहाय्याने मांडली जाणारी सर्वात मोठी संख्या 222 किंवा 22^2 (म्हणजे 484) नसून

$$2^{22}=4194304$$

ही आहे.

वरील उदाहरण एक धडा मात्र देते की गणितशास्त्रामध्ये कोणाचे तरी (उदा. तीन '9' चे) उदाहरण धरून चालणे धोक्याचे असते. त्यामुळे अगदी सहजपणे आपण चुकीचा निष्कर्ष काढू शकतो.

तीन 'तीन'

प्रश्न :

आता कदाचित आपण पुढील प्रश्नाची सोडवणूक करू शकाल :

कोणतीही गणिती चिन्हे न वापरता तीन '3' या अंकाची कशा प्रकारे मांडणी करावी की ज्याद्वारे जास्तीत जास्त मोठी संख्या व्यक्त होऊ शकेल ?

उत्तर :

पूर्वीप्रमाणे '3' या अंकावर दुहेरी घातांक लिहून आपणाला 3^{33} पेक्षाही छोटी संख्याच प्राप्त होईल कारण 3^{3^3} म्हणजे 3^{27} म्हणूनच आपणाला मोठ्यात मोठी संख्या प्राप्त करण्यासाठी 3^{33} अशीच मांडणी करावी लागेल.

तीन 'चार'

प्रश्न :

तीन 'चार' नी कोणतेही गणिती चिन्ह न वापरता मोठ्यात मोठी संख्या लिहावयाची आहे.

उत्तर :

जर या वेळी सुद्धा आपण मागील दोन प्रश्नांचे उत्तर ज्या पद्धती-प्रमाणे दिले त्याप्रमाणे द्याल म्हणजे 4^{44}, तर ही आपली चूक होईल. या वेळी आपण ही संख्या 4^{4^4} अशी लिहाल तर मोठ्यात मोठी संख्या प्राप्त होईल. खरे पाहता $4^4=256$ तर 4^{256} ही संख्या 4^{44} पेक्षा मोठी आहे.

$$4^{4^4}$$

तीन समान अंक

कोणतीही गणिती चिन्हे न वापरता केवळ तीन समान अंकांच्या साहाय्याने मोठ्यात मोठी संख्या लिहिता येते. पुढील प्रकारच्या मांडणीत हा अंक a आहे असे समजू

$$2^{22},\quad 3^{33},\quad 4^{44}$$

त्यानुसार

$$a^{10a+a} \text{ म्हणजेच } a^{11a}.$$

तिहेरी घातांक असलेल्या मांडणीचे स्वरूप असेल :

$$a^{a^a}$$

आता आपण हे पाहू की a द्वारे शेवटच्या स्थानी पहिल्या स्थानाच्या तुलनेने जास्तीत जास्त संख्या व्यक्त केली जाईल. वरील दोन्ही प्रकारच्या मांडणीमध्ये घातांकाचे मूल्य जितके जास्त असेल तितकी ती संख्या मोठी असेल. a^a चे मूल्य 11a पेक्षा जास्त केव्हा होईल ?

$$a^a > 11a?$$

म्हणजे

$$a^{a-1} > 11.$$

वरील समीकरणावरून आपणाला सहजपणे दिसून येईल की जर a ची किंमत 3 पेक्षा जास्त असेल तरच a^{a-1} ची किंमत 11 पेक्षा जास्त होईल कारण

$$4^{4-1} > 11,$$

कारण 3^2 आणि 2^1 याचे मूल्य 11 पेक्षा कमी आहे. वरील सर्व गोष्टीवरून आपणाला हे कळून येईल की 2 आणि 3 च्या बाबतीत एका प्रकारे आणि इतर अंकाच्या बाबतीत दुसऱ्या प्रकारे मांडणी का करावी लागते.

चार एकक

प्रश्न :

कोणतीही गणिती चिन्हे न वापरता चार एककांच्या साहाय्याने जास्तीत जास्त मोठी संख्या लिहावयाची आहे.

उत्तर :

असा प्रश्न विचारताच आपल्या डोळ्यासमोर सर्वात मोठी जर कोणती संख्या येत असेल तर ती म्हणजे 1111. परंतु ही मोठ्यात मोठी संख्या नव्हे, कारण

$$11^{11}$$

ही संख्या या संख्येपेक्षा फारच मोठी आहे. 11 ही संख्या अकरा वेळा मांडून त्यांचा गुणाकार करावयासाठी केवढी सहनशक्ती असायला हवी? परंतु लॉगरिथम सारणीच्या साहाय्याने या प्रचंड संख्येचा अंदाज जाणून घेता येईल.

प्राप्त होणारी संख्या साधारणपणे 285 कोटी पेक्षाही जास्त मोठी आहे.

चार 'दोन'

प्रश्न :

वरील प्रकारेच आता आपण चार 'दोन'ची मांडणी कशा प्रकारे करता येते ते पाहू.

चार 'दोन'च्या कशा प्रकारच्या मांडणी द्वारे मोठयात मोठी संख्या व्यक्त केली जाईल ?

उत्तर :

8 प्रकारच्या मांडण्या या दृष्टीने शक्य आहेत:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$
$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}$$

यापैकी कोणती संख्या सर्वात मोठी आहे ?

सर्वप्रथम वरची रांग पाहू. पहिली संख्या — 2 222 इतर तीन संख्यापेक्षा नक्कीच छोटी आहे. 222^2 आणि 22^{22} यांची तुलना करण्यासाठी 22^{22} या संख्येची पुनर्मांडणी करू :

$$22^{22}=22^{2\cdot 11}=(22^2)^{11}=484^{11}$$

या वरून असे दिसून येईल की 22^{22} ही संख्या 222^2 पेक्षा मोठी आहे.

आता 22^{22} या संख्येची वरील रांगेतील चौथ्या संख्येशी – 2^{222} शी तुलना करू. 22^{22} या संख्येच्या जागी त्याहून मोठी — 32^{22} — संख्या ठेवू आणि हे सिद्ध करू की ही मोठी संख्या देखील 2^{222} पेक्षा छोटी आहे. प्रत्यक्षात

$$32^{22}=(2^5)^{22}=2^{110}$$

म्हणजे घातांक फारच छोटा आहे.

अशा प्रकारे वरच्या ओळीतील सर्वात मोठी संख्या आहे 2^{222}.

आता आपणाला दुसऱ्या ओळीतील चार व वरील एक अशा पाच संख्याची आपापसात तुलना करावयाची आहे. दुसऱ्या ओळीतील चार संख्या आहेत :

$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}$$

वरीलपैकी सर्वात शेवटची संख्या आहे केवळ 2^{16}, त्यामुळे ती आपणाला विचारात घ्यावीच लागणार नाही. त्यानंतर या ओळीतील

पहिली संख्या आहे $22^{2^2} = 22^4$ आणि ती 32^4 किंवा 2^{20} पेक्षा छोटी आहे. म्हणजेच पुढील दोन संख्यांपेक्षा छोटी आहे. आता तुलना करण्यासाठी केवळ तीनच संख्या शिल्लक राहिल्या असून त्यापैकी प्रत्येक संख्येमध्ये 2 चे घातांक आहेत. त्याअर्थी ज्या संख्येचा घातांक मोठा ती संख्या मोठी असेल. हे घातांक पुढीलप्रमाणे :

$$222{,}484 \text{ आणि } 2^{20+2} (= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4)$$

शेवटची संख्या अर्थातच मोठी आहे.

म्हणून चार ‘दोन’ द्वारे मांडणी करता येणारी सर्वात मोठी संख्या आहे — $2^{2^{22}}$.

लॉगरिथम सारणीचा वापर न करता या संख्येचा आपणाला ढोबळ अंदाज घेता येईल :

$$2^{10} \approx 1\,000.$$

प्रत्यक्षात,

$$2^{22} = 2^{22} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$

$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\,000\,000} > 10^{1\,200\,000}$$

यावरून आपणाला या संख्येच्या अवाढव्यतेची कल्पना करता येईल.

प्रकरण 2

बीजगणिताची भाषा

समीकरण मांडण्याची कला

बीजगणिताची भाषा म्हणजे समीकरणे. "संख्या किंवा प्रमाणांच्या अमूर्त संबंधाविषयांच्या प्रश्नांची आणि समस्यांची सोडवणूक करण्यासाठी केवळ आपल्या मातृभाषेतील या प्रश्नाचा बीजगणिताच्या भाषेत अनुवाद करणे आवश्यक आहे", असे न्यूटनने आपल्या 'सामान्य अंकगणित' या बीजगणिताच्या पाठ्य पुस्तकामध्ये लिहिले आहे. मातृभाषेतून बीज-गणिताच्या भाषेमध्ये कसा "अनुवाद" करावयाचा ते न्यूटनने उदाहरणां-द्वारे दाखवून दिले आहे–त्यापैकी एक उदाहरण पुढीलप्रमाणे आहे:

मातृभाषा	बीजगणिताची भाषा
व्यापाऱ्याकडे काही पैसे होते	x
पहिल्या वर्षी त्याने 100 पौंड खर्च केले	$x - 100$
शिल्लक राहिलेल्या रकमेत त्याने त्या रकमेचा तिसरा भाग जमा केला	$(x - 100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$
पुढील वर्षी त्याने पुन्हा 100 पौंड खर्च केले	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
शिल्लक रकमेत त्याने त्या रकमेचा तिसरा भाग जमा केला	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$

मातृभाषा	बीजगणिताची भाषा
तिसऱ्या वर्षी त्याने पुन्हा 100 पौंड खर्च केले	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
शिल्लक राहिलेल्या रकमेमध्ये जेव्हा त्याने त्या रकमेचा तिसरा भाग जमा केला तेव्हा...	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
त्याच्याजवळ सुरुवातीला असलेल्या रकमेच्या दुप्पट रक्कम गोळा झाली.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

व्यापाऱ्याजवळ सुरुवातीला असलेली रक्कम जाणून घेण्यासाठी आपणाला फक्त शेवटचे समीकरणच काय ते सोडवावे लागेल.

खुद्द समीकरण सोडवणे तितकेसे अवघड नाही, परंतु समीकरण मांडणे मात्र काहीसे कठीण काम आहे. वरील उदाहरणावरून आपणाला दिसून आलेच असेल की आपल्या मातृभाषेतून बीजगणिताच्या भाषेमध्ये अनुवाद करणे ही खरोखरीच एक कला असून ती आत्मसात करून घेणे आवश्यक आहे. बीजगणिताच्या भाषेचे शब्दभांडार फारच मर्यादित असल्यामुळे आपल्या मातृभाषेतील सर्वच वाक्यांचा अनुवाद सहजपणे करता येईल असे नाही. कठीणतेच्या दृष्टिकोनातून चर्चा करू.

डिओफँटचे जीवन

प्रश्न :

डिओफँट या प्राचीन गणितज्ञाच्या जीवनाविषयी इतिहासशास्त्र आपणाला फारच थोडी माहिती देऊ शकते. जे काही त्याच्याविषयी आपणाला ठाऊक आहे ते म्हणजे त्याच्या कबरीवर गणितातील प्रश्नाच्या स्वरूपात लिहिलेला मजकूर. हा मजकूर असा आहे :

मातृभाषा	बीजगणिताची भाषा
प्रवासी मित्र! या ठिकाणी डिओफँट विश्रांती घेत आहे. आपल्या जीवनयात्रेमध्ये त्याने किती प्रवास केला ते या संख्या बोलून दाखवतील.	x
आपल्या जीवनाचा सहावा भाग त्याने आनंदी बालपणात व्यतीत केला	$\frac{x}{6}$
जीवनाचा आणखी बारावा भाग लोटला — त्याने यौवनामध्ये प्रवेश केला	$\frac{x}{12}$
जीवनाचा सातवा भाग त्याने विनापत्य व्यतीत केला	$\frac{x}{7}$
पाच वर्षांचा काळ लोटला ; पहिल्या मुलाच्या जन्माने त्याच्या जीवनात आनंद बहरला	5
आपल्या आयुष्याचा निम्मा काळ त्याने आपल्या मुलाला पितृसुख दिले	$\frac{x}{2}$
आणि शेवटी तो दुर्दैवी क्षण आला. आपल्या मुलाच्या मृत्यूनंतर त्या दुःखाच्या यातना चार वर्षे भोगून शेवटी त्याने या जगाचा निरोप घेतला	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

प्रवासीमित्रा तूच सांग डिओफँटने किती वर्षे या भुतलावर जीवन व्यतीत केले ?

उत्तर :

वरील समीकरण सोडवून जेव्हा x ची किंमत 84 आहे हे आपण ठरविता तेव्हा आपणाला डिओफँटच्या जीवनाविषयी बरीच माहिती मिळते. वयाच्या 21 व्या वर्षी त्याचे लग्न झाले, 38 व्या वर्षी त्याला पुत्रलाभ झाला, वयाच्या 80 व्या वर्षी त्याने आपल्या एकुलत्या पुत्राला गमावले आणि वयाच्या 84 व्या वर्षी त्याची जीवनज्योत मावळली.

घोडा आणि खेचर

प्रश्न :

मातृभाषेमधून बीजगणिताच्या भाषेमध्ये अनुवाद करण्यास सोपा असलेला आणखी एक प्रश्न पहा.

"एक घोडा आणि एक खेचर पाठीवर भरपूर ओझे घेऊन जोडीने जात होते. रस्त्यात घोड्याने आपल्या पाठीवरील ओझ्यासंबंधी तक्रार करण्यास सुरुवात केली. 'तुला तक्रार करावयास काय झाले?' खेचराने घोड्याला विचारले. 'जर तुझ्या पाठीवरील एक पोते मी घेतले तर माझ्या पाठीवरील ओझे तुझ्या पाठीवरील ओझ्यापेक्षा दुप्पट होईल. आणि जर तू माझ्या पाठीवरील एक पोते घेतलेस तर आपल्या दोघांच्या पाठीवरील ओझी सारखी होतील.'

तर विद्वान गणितज्ञ हो, तुम्हीच सांगा की घोड्याच्या पाठीवर किती पोती होती आणि खेचराच्या पाठीवर किती?"

उत्तर :

जर तुझ्या पाठीवरील एक पोते मी घेतले	$x - 1$
तर माझ्या पाठीवरील ओझे	$y + 1$
तुझ्या पाठीवरील ओझ्यापेक्षा दुप्पट होईल.	$y + 1 = 2(x - 1)$
आणि जर तू माझ्या पाठीवरील एक पोते घेतलेस	$y - 1$
तर तुझे ओझे	$x + 1$
माझ्या पाठीवरील ओझ्याइतके होईल.	$y - 1 = x + 1$

दोन अज्ञात संख्यांचे कोडे आपण आता सोडवत आहोत.

$$\left.\begin{aligned} y+1 &= 2(x-1) \\ y-1 &= x+1 \end{aligned}\right\} \text{ किंवा } \left\{\begin{aligned} 2x-y &= 3 \\ y-x &= 2 \end{aligned}\right.$$

हे समीकरण सोडविल्यास आपणाला असे आढळून येईल की $x=5$, $y=7$, म्हणजे घोडयाच्या पाठीवर 5 पोती होती तर खेचराच्या पाठीवर 7.

चार भाऊ

प्रश्न :

चार भावांजवळ एकूण 45 रुपये होते. जर पहिल्या भावाकडे असलेल्या पैशात दोन रुपये मिळविले आणि दुसऱ्या भावाकडील पैशातून दोन रूपये काढून घेतले, तिसऱ्या भावाकडील पैसे दुप्पट केले आणि चौथ्या भावाकडील पैसे निम्मे केले तर सर्वांकडे समान रक्कम होत असे. प्रत्येक भावाकडे किती किती पैसे होते?

उत्तर :

चार भावांजवळ एकूण 45 रुपये होते.	$x+y+z+t=45$
जर पहिल्या भावाकडील पैशात 5 रुपये मिळविले,	$x+2$
दुसऱ्या भावाकडील पैशातून 2 रुपये काढून घेतले,	$y-2$
तिसऱ्या भावाकडील रक्कम दुप्पट केली,	$2z$
चौथ्या भावाकडील रक्कम निम्मी केली,	$\frac{t}{2}$
तर सर्वांजवळ समान रक्कम होते	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

शेवटच्या समीकरणाचे तीन निरनिराळया समीकरणांमध्ये रूपांतर करू :

$$x+2=y-2,$$
$$x+2=2z,$$

$$x+2=\frac{t}{2},$$

या वरून

$$y=x+4,$$
$$z=\frac{x+2}{2},$$
$$t=2x+4.$$

पहिल्या समीकरणामध्ये या किंमती घातल्यास :

$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45,$$

म्हणजेच $x=8$. यावरून आपणाला $y=12$, $z=6$ आणि $t=20$ या किंमती प्राप्त होतात. पर्यायी या चार भावांजवळ पुढील रकमा होत्या :

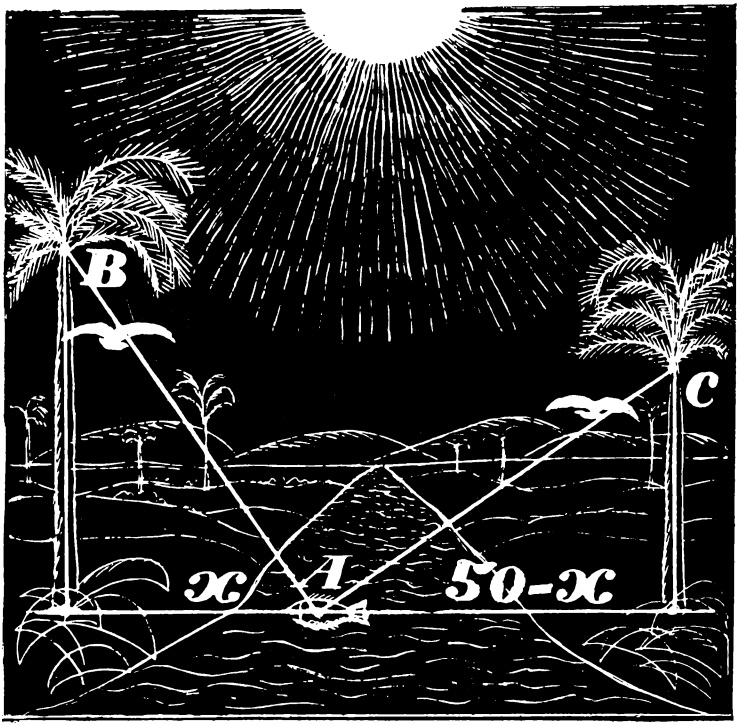
पहिला भाऊ = 8 रुपये,
दुसरा भाऊ = 12 रुपये,
तिसरा भाऊ = 5 रुपये,
चौथा भाऊ = 20 रुपये.

नदी किनाऱ्याचे पक्षी

प्रश्न :

अकराव्या शतकातील एका अरब गणितज्ञाने एक कोडे घातले होते :

नदीच्या दोन्ही किनाऱ्यांवर एकमेकांसमोर दोन पामवृक्ष वाढत आहेत. एका वृक्षाची उंची 30 हात आहे तर दुसऱ्याची 20 हात. दोन्ही वृक्षांच्या बुंध्यादरम्यानचे अंतर आहे 50 हात. प्रत्येक वृक्षावर एक एक पक्षी बसलेला आहे. अचानक एकाच वेळी दोन्ही पक्षांची नजर एका माशावर पडली. मासा दोन्ही वृक्षांदरम्यानच्या पाण्याच्या पृष्ठ-भागावर येताच दोन्ही पक्षांनी त्या दिशेने झेप घेतली आणि एकाच वेळी त्यांनी तो मासा पकडला.



आकृती 5

अधिक उंच वृक्षाच्या बुंध्यापासून किती अंतरावर तो पक्षी पाण्याच्या पृष्ठभागावर आला होता ?

उत्तर :

आकृती क्र. 5 मध्ये दर्शविलेल्या रुपरेखेनुसार पायथागोरसचा सिद्धांत वापरल्यास :

$$AB^2 = 30^2 + x^2,$$

$$AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

परंतु AB=AC कारण दोन्ही पक्षांनी हे अंतर एकाच वेळी पार केले. म्हणून

$$30^2+x^2=20^2+(50-x)^2.$$

यावरून आपणाला x ची किंमत काढता येते. $100x=2\,000$, म्हणून $x=20$

तो मासा 30 हात उंच असलेल्या पामवृक्षाच्या बुंध्यापासून 20 हातावर पृष्ठभागी आला.

फिरणे

प्रश्न :

—उद्या दुपारी तुम्ही माझ्याकडे या,—वृद्ध डॉक्टर आपल्या स्नेह्याला म्हणाले.

—ठीक आहे. तीन वाजता मी घराबाहेर पडेल. या वेळी जर आपणाला सहज बाहेर फिरवेसे वाटले तर आपण दवाखान्याच्या मार्गा-वरच कोठेतरी भेटू या.

—आपण हे विसरलात की मी आता म्हातारा झालो आहे. अगदी हळूहळू चालतो. तासाला फक्त 3 कि. मी. वेगाने. आपण अद्यापि तरुण आहात. जरी हळूहळू पाऊले टाकली तरी आपला चालण्याचा वेग ताशी 4 कि. मी. आहे. ही गोष्ट लक्षात घेऊन मला थोडीशी सवलत देत असाल तर पहा.

—आपले म्हणणे अगदी बरोबर आहे. आपल्या पेक्षा माझा चाल-ण्याचा वेग 1 कि. मी. ने जास्त असल्यामुळे मी हा एक कि. मी. आपणाला देईन म्हणजे बरोबर होईल. ठीक आहे? म्हणजे मी 15 मिनिटे आधीच घराबाहेर पडेन.

—ठीक आहे,—डॉक्टरांनी लगबगीने संमती दिली.

तरुणाने सर्व काही ठरल्याप्रमाणे केले. तीनच्या ऐवजी पावणे तीन वाजताच तो घराबाहेर पडला आणि ताशी 4 कि. मी. वेगाने चालण्यास त्याने सुरुवात केली. डॉक्टर बरोबर तीन वाजता बाहेर पडले आणि ठरल्याप्रमाणे ताशी 3 कि. मी. वेगाने त्यांनी याच मार्गावर पाऊले टाकण्यास सुरुवात केली. दोघे एकमेकांना भेटले आणि

मागे वळून त्यांनी दवाखान्याच्या दिशेने चालण्यास सुरुवात केली.

आपल्या घरी परत आल्यानंतरच तरुणाच्या लक्षात आले की डॉक्टरांना 15 मिनिटाची सवलत दिल्यामुळे त्याला एकंदरीत दुप्पट नव्हे तर डॉक्टरांच्या तुलनेने चौपट जास्त चालावे लागले.

तरुणाचे घर डॉक्टरांच्या दवाखान्यापासून किती अंतरावर आहे?

उत्तर:

तरुणाचे घर आणि डॉक्टरांचा दवाखाना या दरम्यानचे अंतर x कि. मी. आहे असे समजू.

तरुणाला एकंदरीत 2x इतके अंतर चालावे लागले तर डॉक्टरांना त्यापेक्षा 1/4 कमी चालावे लागले, म्हणजेच $\frac{x}{2}$. दोघांची एकमेकांशी भेट होईपर्यंत डॉक्टर निम्मे अंतर म्हणजेच $\frac{x}{4}$ चालून गेले होते तर तरुण बाकी शिल्लक असलेले म्हणजेच $\frac{3x}{4}$. आपल्या वाटचाचे अंतर डॉक्टरांनी $\frac{x}{12}$ तासात पार केले तर तरुणाने स्वतःचे अंतर $\frac{3x}{16}$ तासात. या व्यतिरिक्त आपणाला ठाऊक आहे की तरुण 15 मिनिटे (1/4 तास) पूर्वीच बाहेर पडला होता. या सर्व गोष्टींवरून आपणाला पुढील समीकरण मिळते:

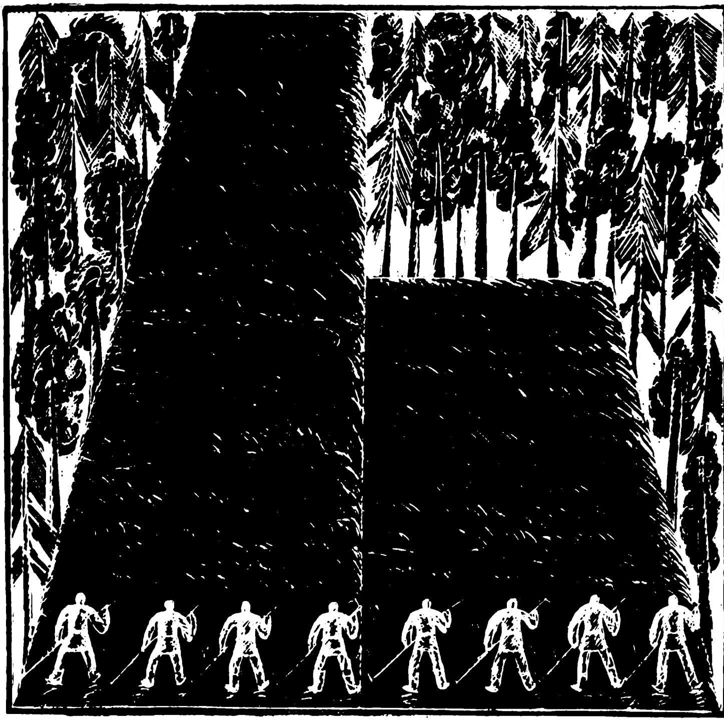
$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

त्या अर्थी x = 2.4 कि. मी.

डॉक्टरांचा दवाखाना तरुणाच्या घरापासून 2.4 कि. मी. अंतरावर आहे.

गवत कापणी

विख्यात भौतिकशास्त्रज्ञ ए. व्ही. त्सिंगर यांनी रशियन लेखक लेव तोलस्तोय यांच्या विषयीच्या आठवणी सांगताना पुढील कोडे सांगितले जे या महान लेखकाला खूप आवडत असे:



आकृती 6

“गवताची कापणी करणाऱ्या शेतकऱ्यांच्या समूहाला दोन शेतात कापणी करावयाची होती. आकारमानाने एक शेत दुसऱ्या शेताच्या दुप्पट होते. अर्धा दिवस मोठ्या शेताची कापणी केल्यानंतर शेतकऱ्यांनी दोन गट तयार केले: पहिल्या गटाने मोठ्या शेतातच काम पुढे चालू ठेवले आणि संध्याकाळपर्यंत पूर्ण कापणी केली, दुसऱ्या गटाने छोटे शेत कापणीस घेतले, पण संध्याकाळी बराच भाग कापणी करावयाचा शिल्लक राहिला होता. दुसऱ्या दिवशी या भागाची कापणी करण्यासाठी एका शेतकऱ्यास संपूर्ण दिवस काम करावे लागले असते.

तर समूहामध्ये एकूण किती शेतकरी होते?”

उत्तर :

एकूण शेतकऱ्यांची संख्या x होती असे समजू: दुसऱ्या दिवशी एका शेतकऱ्याने संपूर्ण दिवसभर कापणी केलेल्या भागाचे आकारमान y गृहित धरू. जरी आपणाला हे आकारमान जाणून घ्यावयाचे नसले तरी त्यामुळे मुख्य प्रश्नाचे उत्तर शोधून काढणे सुलभ होईल.

x आणि y च्या माध्यमामधून मोठ्या शेताचे स्वरूप पाहू. x शेतकऱ्यांनी या शेताची कापणी अर्धा दिवस केली. त्यांनी

$$x \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{2}$$

इतकी कापणी केली.

बाकी अर्धा दिवस फक्त निम्म्या लोकांनी या भागाची कापणी केली, याचा अर्थ $\frac{x}{2}$ शेतकऱ्यांनी $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$ इतकी कापणी केली.

संध्याकाळपर्यंत या मोठ्या शेतातील कापणी पूर्ण झाली होती यावरून या शेताचे आकारमान काढता येईल :

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

आता x आणि y ची मदत घेऊन छोट्या शेताकडे वळू. $\frac{x}{2}$ शेतकऱ्यांनी $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$ इतक्या भागाची कापणी अर्ध्या दिवसात केली. यामध्ये दुसऱ्या दिवशी एका शेतकऱ्याने संपूर्ण दिवस ज्या भागाची कापणी केली तो y भाग मिळवू म्हणजे या छोट्या शेताचे आकारमान आपणास कळेल :

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

आता "पहिले शेत दुसऱ्या शेतापेक्षा आकारमानाने दुप्पट होते" या वाक्याचा बीजगणिताच्या भाषेत अनुवाद करणे बाकी आहे. हा अनुवाद असा :

$$\frac{3xy}{4} \div \frac{xy + 4y}{4} = 2 \text{ किंवा } \frac{3xy}{xy + 4y} = 2.$$

अनावश्यक असलेला y या समीकरणातून काढून टाकल्यास

$$\frac{3x}{x+4} = २, \text{ किंवा } 3x=2x+8,$$

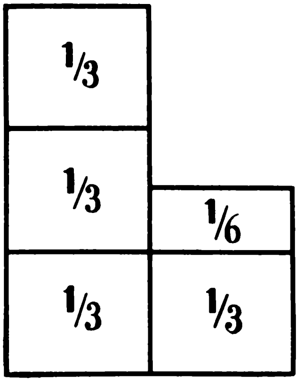
म्हणजे x=8 समूहामध्ये एकूण 8 शेतकरी होते.

"मनोरंजक बीजगणित" या माझ्या पुस्तकाची पहिली आवृत्ती प्रसिद्ध झाल्यानंतर प्रो. ए. व्ही. त्सिंगर यांनी मला या कोड्यासंबंधी एक सविस्तर व मनोरंजक पत्र लिहिले. त्यांच्या मतानुसार या कोड्याची खरी मेख या गोष्टीत आहे की "हे कोडे बीजगणितात मुळीच मोडत नाही तर ते पूर्णपणे अंकगणिताशी संबंधीत आहे व अत्यंत सोपे आहे. फक्त ते सांगण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या लाबंलचक मजकुरामुळे सर्वजण गोंधळात पडतात."

प्रो. ए. व्ही. त्सिंगर पुढे म्हणतात: "या कोड्याचा इतिहास असा: जेव्हा माझे वडील व माझे काका आय. आय. रायेव्स्की (लेव तोलस्तोय यांचे परममित्र) मॉस्को विद्यापीठाच्या गणितविभागात शिकत होते तेव्हा या विद्यापीठात अध्यापन शास्त्रासारखा एक विषय शिकविला जात असे. यासाठी विद्यार्थ्यांना शहरातील सार्वजनिक शाळेमध्ये जावे लागत असे व तेथे अनुभवी शिक्षणतज्ञांच्या आणि शिक्षकांच्या मार्ग-दर्शनाखाली अध्यापनशास्त्राचा अभ्यास करावा लागत असे. त्सिंगर आणि रायेव्स्की यांचा पेत्रोव नावाचा एक मित्र होता. या पेत्रोव याचे असे म्हणणे होते की अंकगणिताच्या तासाच्या वेळी वाटेल ती कोडी घालून व ती सोडवावयास लावून मुलांचे नुकसान केले जाते. उदाहरणा-दाखल पेत्रोव याने एक कोडे घातले जे सोडवणे अनुभवी शिक्षकांना देखील फार कठीण गेले परंतु या अंकगणिताच्या तासांना न बसलेल्या इतर हुशार विद्यार्थ्यांनी ते सहजपणे सोडवले. अशाच प्रकारचे एक कोडे (पेत्रोव याने अनेक कोडी तयार केली होती.) म्हणजे वरील. अनुभवी शिक्षकांनी साहजिकच समीकरणांच्या साहाय्याने ते सहज सोडविले परंतु अंकगणितातील साधे नियम त्यांच्या नजरेतून सुटले. खरे पाहता हे कोडे इतके सोपे आहे की बीजगणितातील समीकरणांची त्यासाठी काहीही आवश्यकता नाही.

मोठ्या शेतात अर्धा दिवस संपूर्ण समूहाने व अर्धा दिवस निम्म्या

समूहाने कापणी केली. याचा अर्थ निम्मा समूह अर्ध्या दिवसात $\frac{1}{3}$ शेताची कापणी करतो. म्हणजेच छोटया शेतामध्ये कापणी न झालेला भाग $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ इतका शिल्लक राहतो. जर एक शेतकरी संपूर्ण दिवसामध्ये $\frac{1}{6}$ शेतांची कापणी करतो तर $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ इतक्या शेताची कापणी 8 शेतकरी करतात हेच यावरून स्पष्ट होते.



आकृती 7

तोलस्तोय यांना कोडी फार आवडत. माझ्या वडिलांनी त्यांना हे कोडे सांगितले. तोलस्तोय यांच्या वृद्धोपकाळात जेव्हा मी त्यांच्याशी या कोडयासंबंधी चर्चा केली तेव्हा त्यांना या गोष्टीचे नवल वाटले की आकृती क्र. 7 च्या साहाय्याने हे कोडे चट्कन सोडविता येते."

अशाच प्रकारची काही कोडी आता आपण पाहू. ही कोडी सोडविण्यासाठी बीजगणिताची नव्हे तर अंकगणिताची चांगली मदत होईल.

कुरणातील गायी

प्रश्न :

"शास्त्राच्या अभ्यासामध्ये नियमांपेक्षा कोडयांची जास्त मदत होते" – असे न्यूटनने आपल्या "सामान्य अंकगणित" या पुस्तकामध्ये

लिहिले आहे आणि काही उदाहरणे देखील दिलेली आहेत. यापैकी एक आहे कुरणामध्ये चरणाऱ्या बैलांविषयीचे कोडे. पुढील कोडे या कोड्यावर आधारीत आहे:

"संपूर्ण कुरणामध्ये गवत एकसारखे व वेगाने वाढत आहे. 70 गायी हे गवत 24 दिवसांमध्ये तर 30 गायी 60 दिवसांमध्ये खातात. किती गायी 96 दिवसांमध्ये संपूर्ण कुरणामधील गवत फस्त करतील?"

रशियन लेखक अ. पा. चेखोव यांची एक विनोदी कथादेखील याच कोड्यावर आधारीत आहे. ज्यांना हे कोडे सोडविण्यासाठी घालण्यात आले असे दोन विद्यार्थी या कोड्यावर डोकेफोड करीत आहेत:

— काहीतरी विचित्र प्रकार आहे, — एक जण बोलू लागतो, — जर 24 दिवसांमध्ये 70 गायी सर्व गवत खातात तर 96 दिवसांमध्ये किती गायी हेच गवत खातील? अर्थात 70 च्या $\frac{1}{4}$ म्हणजे $17\frac{1}{2}$ गायी... पहिला विचित्र प्रकार! आणि आता दुसरा: 30 गायी 60 दिवसांमध्ये सर्व गवत खातात, 96 दिवसांमध्ये किती गायी हे गवत खातील? उत्तर आणखी विचित्र — $17\frac{3}{4}$ गायी. शिवाय, जर 70 गायी हे गवत 24 दिवसात खातात तर 30 गायींना हे गवत संपविण्यास 56 दिवस लागतील, 60 दिवस मुळीच नाहीत. कोड्यात तर म्हटले आहे 60 दिवस!

— पण गवत कायम वाढत आहे ही गोष्ट ध्यानात घेतली काय? — दुसऱ्याने प्रश्न विचारला.

प्रश्न उचित आहे: गवत अखंडपणे वाढत आहे आणि जर ही गोष्ट ध्यानात घेतली नाही तर हे कोडे तर सुटणार नाहीच नाही, पण कोड्यातील अटच विसंगत ठरेल.

तर हे कोडे कसे सोडवावयाचे?

उत्तर:

कुरणामध्ये वाढणाऱ्या गवताकडे प्रथम वळू. एका दिवसामध्ये y इतके गवत वाढते असे समजू. 24 दिवसामध्ये 24y इतके गवत वाढेल. जर एका दिवसाचे शिल्लक गवत ध्यानात घेतले तर 28 दिवसांमध्ये गायी $1 + 24y$ इतके गवत खातात.

एक दिवसामध्ये 70 गायींचा कळप

$$\frac{1+24y}{24}$$

इतके गवत खातो याचा अर्थ एक गाय $\frac{1+24y}{24\times 70}$ इतके गवत खाते.

अशाच प्रकारे, 30 गायी याच कुरणातील गवत 60 दिवसात खातात. यावरून एक गाय $\frac{1+60y}{30\times 60}$ इतके गवत खाते हे सिद्ध होते.

परंतु दोन कळपांसाठी (30 गायींचा एक आणि 70 गायींचा दुसरा) गवताचा साठा समान आहे. म्हणून

$$\frac{1+24y}{24\times 70}=\frac{1+60y}{30\times 60},$$

त्याअर्थी

$$y=\frac{1}{480},$$

y (वाढत्या गवताचे मूल्य) ची किंमत कळल्यावर सुरुवातीच्या साठ्यातील किती गवत एक गाय एका दिवसात खाते हे समजून घेणे आता सोपे आहे:

$$\frac{1+24y}{24\times 70}=\frac{1+24\times\frac{1}{480}}{24\times 70}=\frac{1}{1600},$$

शेवटी 96 दिवसांमध्ये गवत खाणाऱ्या गायींची संख्या x आहे असे समजू, म्हणजे आपणास पुढील समीकरण प्राप्त होते:

$$\frac{1+96\times\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

यावरून $x=20$.

96 दिवसांमध्ये 20 गायी संपूर्ण गवत खातील.

न्यूटनचे कोडे

आता "सामान्य अंकगणित" या आपल्या पुस्तकात न्यूटनने दिलेल्या कोड्याकडे वळू.

खरे पाहता हे कोडे काही न्यूटनने स्वत: रचलेले नाही. लोककथांमधूनच त्याचा जन्म झालेला आहे.

"$3\frac{1}{3}$, 10 आणि 24 हेक्टर क्षेत्रफळे असलेली तीन कुरणे आहेत. त्यामधील गवत समान दाटीचे असून त्यांचा वाढण्याचा वेगदेखील समान आहे. पहिल्या कुरणामध्ये 12 बैल 4 आठवडे चरत होते. तर दुसऱ्यामध्ये 21 बैल 9 आठवडे. तर तिसऱ्या कुरणामध्ये 18 आठवड्यामध्ये किती बैल चरू शकतील?"

उत्तर :

1 हेक्टर कुरणामध्ये एका आठवड्यामध्ये सुरुवातीस असलेल्या गवतामध्ये y वाढ होते असे समजू. पहिल्या कुरणामध्ये सुरुवातीस 1 हेक्टर जागेत असलेल्या गवतामध्ये एका आठवड्यात $3\frac{1}{3}y$ इतकी तर चार आठवड्यामध्ये $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ इतकी वाढ होते. ही वाढ एवढी आहे की जणू काही कुरणाच्या सुरुवातीच्या क्षेत्रफळात वाढ होऊन ते $(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y)$ इतके होईल. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास, $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ हेक्टर कुरणातील संपूर्ण गवत बैलांनी खाल्ले. एका आठवड्यामध्ये 12 बैलांनी या साठ्याचा 1/4 भाग खाल्ला, म्हणजे एका बैलाने 1/48 भाग खाल्ला, याचा अर्थ

$$\left(3\frac{1}{4} + \frac{40y}{3}\right) \div 48 = \frac{10+40y}{144}$$

जागेतील गवत खाल्ले.

अशाच प्रकारे एक बैल एका आठवड्यात दुसऱ्या कुरणातील किती भागातील गवत खातो ते पाहू. दुसऱ्या कुरणातील गवतामध्ये एका आठवड्यात एका हेक्टरमध्ये y वाढ होते, 9 आठवड्यात 9y तर 10 हेक्टर जागेतील गवतामध्ये 90y वाढ होते.

21 बैल 9 आठवडे खाऊ शकतील इतका गवताचा साठा $10 + 90y$ हेक्टर जागेत असेल.

एका बैलास एका आठवड्यास

$$\frac{10+90y}{9\times21}=\frac{10+90y}{189}$$

इतक्या हेक्टर जागेतील गवत पुरेसे आहे. एका बैलाच्या वाट्यास येणाऱ्या गवत असलेल्या जागा समान क्षेत्रफळाच्या असायला हव्यात, म्हणजेच

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

या समीकरणावरून आपणाला $y=\frac{1}{12}$ मिळेल.

आता एका बैलास एका आठवड्यास पुरेसा पडेल इतका गवताचा साठा कुरणाच्या किती भागात असेल ते पाहू:

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\times\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}$$

हेक्टर. शेवटी 18 आठवड्यामध्ये तिसऱ्या कुरणातील (क्षेत्रफळ 14 हेक्टर) गवत x बैल खातील असे समजू, म्हणजे

$$\frac{24+24\times18\times\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54}$$

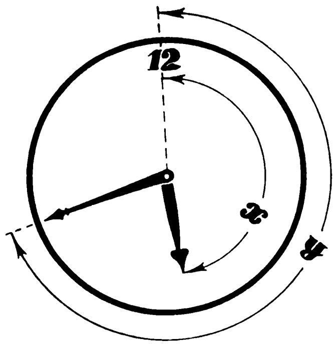
हे समीकरण सोडविल्यास आपणाला मिळेल $x=36$. 18 आठवड्यांमध्ये तिसऱ्या कुरणातील गवत 36 बैल खातील.

घड्याळाचे काटे

प्रश्न :

आल्बर्ट आईनस्टाईनचे चरित्रकार, मित्र आणि प्रख्यात भौतिकशास्त्रज्ञ ए. माशकोवस्की यांनी आईनस्टाईन आजारी असताना त्यांचे मनोरंजन करण्यासाठी एकदा एक कोडे घातले (आकृती 8):

माशकोवस्की म्हणाले : “घड्याळातील 12 वाजण्याच्या वेळेची स्थिती ध्यानात घेऊ. या स्थितीत जर दोन्ही काट्यांनी आपापल्या जागांची अदलाबदल केली तरीही ते एकच वेळ दाखवतील. पण जर दुसरी – उदाहरणार्थ 6 वाजण्याच्या वेळेची – स्थिती घेतली तर, दोन्ही काट्यांनी आपापल्या स्थानांची अदलाबदल केल्यास फारच विचित्र परिस्थिती निर्माण होईल : जेव्हा तासाचा काटा 12 वर असेल तेव्हा मिनिट काटा सहावर असणे शक्यच नाही. बरोबर वेळ दाखविणाऱ्या



आकृती 8

घड्याळामध्ये अशी परिस्थिती कधीही निर्माण होत नाही. एक प्रश्न या ठिकाणी निर्माण होतो : दोन्ही काट्यांच्या स्थानांची अदलाबदल केल्यास, नेहमीची बरोबर वेळ दाखविणाऱ्या घड्याळात शक्य असणारी स्थिती या घड्याळात केव्हा आणि किती वेळा निर्माण होईल ?”

“– हं, आजारपणामुळे अंथरुणाला खिळून असणाऱ्या आजाऱ्यासाठी हे अगदी झकास कोडे आहे” – आईन्स्टाईन उद्गारले. – “कोडे मनोरंजक पण फार कठीण आहे. पण मनोरंजन काही फार काळ टिकणार नाही मी बरोबर उत्तर मिळविण्याच्या मार्गावर आहे.”

अंथरुणात बसून आईन्स्टाईननी कागदावर काही आकृत्या काढल्या, काहीशी आकडेमोड केली. काही वेळातच त्यांनी कोडे सोडविले. तसे पाहता हे कोडे सांगण्यास मलाच त्यांच्याहून जास्त वेळ लागला होता.”

हे कोडे कसे सोडवता येईल ?

उत्तर :

घड्याळ्याच्या तबकडीवर ज्या ठिकाणी 12 आकडा आहे त्या बिंदूपासून 60 समान भाग असलेल्या वर्तुळावर दोन्ही काट्यांदरम्यानचे अंतर मोजू.

असे समजू की आपणाला हवी असलेली परिस्थिती तेव्हा आढळली जेव्हा तास काटा 12 आकड्यापासून x पर्यंत सरकला आणि मिनिट काटा y पर्यंत. तास काटा तबकडीवरील 60 भाग 12 तासात पार करतो, म्हणजे एका तासात 5 भाग पार करतो. म्हणून तो $\frac{x}{5}$ तासात x भागापर्यंत पोहोचेल. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास घड्याळाने 12 वाजल्याचे दाखविल्यानंतर $\frac{x}{5}$ तास उलटले. मिनिट काटा y प्रमाणे मिनिटामध्ये $\frac{y}{60}$ तासामध्ये y भागापर्यंत पोहोचला. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास $\frac{y}{60}$ तासापूर्वी किंवा दोन्ही काटे 12 वर आल्यानंतर

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$$

तास लोटल्यावर मिनिट काट्याने 12 आकडा पार केला. ही संख्या पूर्ण आहे (0 पासून 11 पर्यंत) कारण 12 वाजल्यानंतर किती पूर्ण तास लोटले ते ही संख्या दाखवते.

जेव्हा दोन्ही काटे आपापल्या जागांची अदलाबदल करतील तेव्हा 12 वाजल्यापासून काटे जी वेळ दाखवितात त्या वेळेपर्यंत

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$$

इतके पूर्ण तास लोटले हे आपणाला कळते. ही संख्या देखील पूर्णच असेल (शून्यापासून 11 पर्यंत).

यावरून आपणाला पुढील समीकरणे मिळतात :

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n, \end{cases}$$

जेथे m आणि n या 0 पासून 11 पर्यंत बदलणाऱ्या पूर्ण संख्या होत. वरील समीकरणावरून आपणाला प्राप्त होते:

$$x=\frac{60(12m+n)}{143},$$
$$y=\frac{60(12n+m)}{143}.$$

m आणि n यांना शून्यापासून 11 पर्यंत किंमत देऊन काटयांच्या आवश्यक असलेल्या सर्व स्थिती आपण निश्चित करू शकतो. शून्यापासून 11 पर्यंतच्या प्रत्येक 12 किंमती m आणि n, दोहोंच्या बाबतीत तुलना करण्याजोग्या असल्यामुळे असे वाटेल की $12\times12=144$ स्थिती शक्य आहेत. परंतु प्रत्यक्षात मात्र ही संख्या 143 आहे, कारण m आणि n च्या किंमती 0 आणि 11 असताना ($m=0$, $n=0$ आणि $m=11$, $n=11$) काटयांची स्थिती एकसारखीच असेल. $m=11$, $n=11$ असताना:

$$x=60, \qquad y=60,$$

म्हणजेच घडयाळामध्ये 12 वाजलेले असतील आणि $m=0$, $n=0$ असताना हीच परिस्थिती असेल.

सर्व शक्य स्थितींचा आपण येथे विचार करू शकत नाही. केवळ उदाहरणादाखल दोन स्थितींचा विचार करू.

उदाहरण 1:

$$m=1, \qquad n=1;$$
$$x=\frac{60\times13}{143}=5\frac{5}{11}, \quad y=5\frac{5}{11},$$

म्हणजे घडयाळामध्ये 1 वाजून $5\frac{5}{11}$ मिनिटे झालेली असतील, या वेळी दोन्ही काटे एकाच ठिकाणी असतील त्यांची आपण अर्थातच अदलाबदल करू शकतो.

उदाहरण 2:

$$m=8,\ n=5;$$
$$x=\frac{60(5+12\times8)}{143}\approx42.38, \ \ y=\frac{90(8+12\times5)}{143}\approx28\cdot53.$$

8 वाजून 28.53 मिनिटे आणि 5 वाजून 42.38 मिनिटे झाली असताना आपण दोन्ही काटयांच्या स्थानांची अदलाबदल करू शकतो.

आपणाला ठाऊक आहे की अशा प्रकारच्या 143 स्थिती शक्य आहेत. घडयाळाच्या तबकडीवर हे सर्व बिंदू निश्चित करण्यासाठी तबकडीचे 143 समान भाग करावे लागतील. दोन बिंदूदरम्यानच्या बिंदूवर आपणाला हवी असलेली स्थिती मिळू शकणार नाही.

घडयाळचे दोन्ही काटे जेव्हा एकाच बिंदूवर असतात

प्रश्न :

व्यवस्थितपणे चालणाऱ्या घडयाळामध्ये अशा किती स्थिती असतील की जेव्हा घडयाळाचे दोन्ही काटे बरोबर एकमेकांवर असतील ?

उत्तर :

या पूर्वीचे कोडे सोडविताना वापरलेले समीकरण आपण या ठिकाणी वापरू शकतो, कारण जेव्हा तास काटा आणि मिनिट काटा एकमेकांवर येतात तेव्हा आपण त्यांची अदलाबदल करू शकतो, त्यामुळे फरक असा पडत नाही. या ठिकाणापर्यंत दोन्ही काटयांनी 12 आकडयापासून समान भाग पार केलेले असतात, म्हणजेच $x=y$ अशा प्रकारे या पूर्वीचे कोडे सोडविताना वापरलेले समीकरण या ठिकाणी देखील वापरल्यास आपणाला पुढील समीकरण मिळेल :

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{60}=m,$$

या ठिकाणी $m=0$ पासून 11 पर्यंतची पूर्ण संख्या आहे. या समीकरणावरून आपणाला x ची पुढील किंमत मिळेल :

$$x=\frac{60m}{11}.$$

शून्यापासून 11 पर्यंत कोणंतीही किंमत जरी m ला दिली तरी काटयाच्या निरनिराळया 12 नव्हे तर 11 स्थिती आपणाला दिसून

गतील, कारण जेव्हा m ची किंमत 11 असेल (m=11) तेव्हा x =60, म्हणजेच दोन्ही काटे 60 भाग पार करून 12 या आकड्यावर येतात. जर m=0 असेल तर हीच परिस्थिती आढळन गईल.

संख्या ओळखण्याची कला

संख्या ओळखणारे अनेक "जादूगार" आपल्या पहाण्यात आले असतीलच. हे जादूगार नेहमी पुढीलप्रकारचे गणिती संस्कार संख्येवर करायला सांगतात: एक संख्या मनात धरा, त्यामध्ये 2 मिळवा, प्राप्त झालेल्या संख्येस 3 ने गुणा, त्यातून 5 वजा करा त्यानंतर मनात धरलेली संख्यादेखील वजा करा इत्यादी–एकूण क्रिया 5, कधी कधी दहा क्रिया देखील करावयास लावतात. नंतर जादूगार आपणास विचारतो शेवटी किती संख्या शिल्लक राहिली व ती सांगताच लगेचच आपण मनात धरलेली संख्या तो सांगतो.

अर्थात ही "जादू" अत्यंत सोपी आहे आणि ती आपण वर पाहिलेल्या समीकरणांवर आधारीत आहे.

उदाहरणार्थ, खालील कोष्टकातील डाव्या बाजूकडील क्रिया करण्यास जादूगाराने आपणास सांगितले आहे:

एक संख्या मनात धरा,	x
2 मिळवा,	$x+2$
प्राप्त संख्येला 3 ने गुणा,	$3x+6$
त्यामधून 5 वजा करा,	$3x+1$
शिल्लक राहिलेल्या संख्येमधून मनात धरलेली संख्या वजा करा,	$2x+1$
प्राप्त संख्येला 2 ने गुणा	$4x+2$
व बाकी मधून 1 वजा करा	$4x+1$

वरील क्रिया पूर्ण केल्यानंतर जादूगार आपणाला अंतिम निष्कर्ष

$(4x+1)$ विचारतो व त्यानंतर लागलीच मनात धरलेली संख्या तो आपणाला सांगतो. तो हे कसे काय करतो?

ही गोष्ट कळण्यासाठी वरील कोष्टकाकडे लक्षपूर्वक पाहणे पुरेसे आहे. या कोष्टकात जादूगाराने दिलेल्या आदेशांचा बीजगणिताच्या भाषेमध्ये अनुवाद केला आहे. या कोष्टकावरून दिसते की जर आपण मनात x ही संख्या धरली असेल तर सर्व गणितीसंस्कारांच्या शेवटी $4x+1$ यायला हवेत आणि जर हे ठाऊक असेल तर मनात धरलेली संख्या ओळखणे मुळीच अवघड नाही.

समजा आपण जादूगाराला सांगितले की अंतिम संख्या 33 आहे. जादूगार चटकन आपल्या मनात समीकरण मांडतो $4x+1=33$ आणि $x=8$ हा निर्णय काढतो. यासाठी तो 33 मधून 1 वजा कर करतो व बाकीस 4 ने भाग देतो. पहा किती सोपी "जादू" आहे ही.

वरील मूळ गोष्ट आपल्या ध्यानात आल्यास आपण आपल्या मित्रांना मनात संख्या धरावयास सांगून व त्यावर अनेक गणिती संस्कार करावयास सांगून शेवटी त्याने मनात धरलेली संख्या ओळखून त्याला चकित करू शकता. समजा आपला मित्र देखील मनात 5 ही संख्या धरतो. ती वर अनेक गणिती संस्कार करतो व आपणाला कसे गोंधळात टाकले या अविर्भावाने आपणाकडे पहात तो म्हणतो:

—मी एक संख्या मनात धरली, तिला 2 ने गुणले, प्राप्त संख्येत 3 मिळविले, त्यानंतर मनात धरलेली संख्या तीमध्ये मिळविली, त्यात मी 1 मिळविला, 2 ने गुणले; मनात धरलेली संख्या तीमधून वजा केली; पुन्हा 3 वजा केले, पुन्हा एकदा मनात धरलेली संख्या तीमधून वजा केली, प्राप्त संख्येला 2 ने गुणले आणि तीत 3 मिळविले.

मित्राला वाटते की त्याने आपणाला चांगलेच गोंधळात टाकले व मोठ्या उत्साहाने तो अंतिम प्राप्त संख्या जाहीर करतो:

— 49 येतात.

पुढच्या क्षणालाच आपण त्याला सांगता की त्याने 5 ही संख्या मनात धरली होती. त्या क्षणीच त्याचा सारा उत्साह मावळतो व तो आश्चर्यचकित होतो.

आपण ही संख्या कशी काय ओळखली ते आता आपणाला ठाऊक

झालेच आहे. आपण त्याला ज्या ज्या क्रिया करावयास सांगितल्या त्यांचे भाषांतर बीजगणिताच्या भाषेत करा म्हणजे झाले. खालील सारणी-वरून आपणाला हे स्पष्ट होईल :

मी एक संख्या मनात धरली,	x
तिला 2 ने गुणले,	2x
प्राप्त संख्येत 3 मिळविले,	$2x+3$
नंतर तीमध्ये मनात धरलेली संख्या मिळविली,	$3x+3$
आता मी त्यात 1 मिळविला,	$3x+4$
व 2 ने गुणले,	$6x+8$
प्राप्त संख्येतून मनात धरलेली संख्या वजा केली,	$5x+8$
पुन्हा 3 वजा केले,	$5x+5$
पुन्हा एकदा मनात धरलेली संख्या वजा केली,	$4x+5$
नंतर 2 वजा केले,	$4x+3$
शेवटी प्राप्त संख्येला 2 ने गुणले	$8x+6$
तीत 3 मिळविले	$8x+9$

जेव्हा आपला मित्र सांगतो की अंतिम निष्कर्ष 49 आहे, तेव्हा आपण मनात समीकरण मांडता $8x+9=49$. हे समीकरण सोडविणे, अर्थात, अगदीच क्षुल्लक बाब आहे. आपण लागलीच मित्राच्या मनातील संख्या ओळखता — 5.

ही जादू अधिक प्रभावशाली वाटते कारण मनात धरलेल्या संख्येवर निरनिराळे गणिती संस्कार करावयास तुम्ही आपल्या मित्राला सांगत नाही तर खुद्द तुमचा मित्रच सारे काही करतो.

खरे सांगावयाचे म्हणजे एका क्षणी मात्र तुमची जादू यशस्वी ठरणार नाही. जर, उदाहरणार्थ, काही क्रियांनंतर तुम्हाला (मनातल्या मनात) $x+14$ ही राशी कळली आणि त्यानंतर तुमचा मित्र म्हणाला : "...आता मी त्यामधून मनात धरलेली संख्या वजा केली ;

बाकी राहिले 14", तर तुम्ही मनात हिशेब मांडता : $(x+4)-x=14$ – खरोखरच 14 मिळाले, पण कोणतेही समीकरण मिळत नाही आणि तुम्ही मित्राने मनात धरलेली संख्या ओळखू शकत नाही. अशा वेळी काय करायचे? पुढीलप्रमाणे करा : **अज्ञात** x नसलेले उत्तर ज्या क्षणी तुम्हाला मिळेल त्या क्षणीच तुम्ही तुमच्या मित्राला थांबवा : "थांब! आता मी तुला पुढील प्रश्न न विचारता तुला काय बाकी मिळाली ते सांगू शकतो : तुला बाकी मिळाली – 14." हे ऐकून तुमच्या मित्राला आश्चर्याचा धक्का बसेल कारण त्याने तुम्हाला काहीच सांगितलेले नाही! आणि जरी तुम्ही त्याच्या मनातली संख्या ओळखली नाही तरीही तुमची जादू प्रभावशाली ठरली!

पुढील उदाहरण पहा (पूर्वी प्रमाणेच डाव्या बाजूस तुमचा मित्र जे काही बोलतो ते आहे) :

मी एक संख्या मनात धरली,	x
त्यात 2 मिळवले,	$x+2$
मिळालेल्या संख्येस 2 ने गुणले,	$2x+4$
आता त्यात 3 मिळवले,	$2x+7$
त्यातून मनात धरलेली संख्या वजा केली,	$x+7$
मिळालेल्या उत्तरात 5 मिळवले,	$x+12$
त्यातून मनात धरलेली संख्या वजा केली	12

आणि याच क्षणाला तुम्हाला मनातल्या मनात 12 हे उत्तर मिळाले, म्हणजेच अज्ञान x नसलेले समीकरण तुम्हाला मिळाले, येथे तुम्ही आपल्या मित्राला थांबवता आणि सांगता की त्याला 12 ही संख्या प्राप्त झाली आहे.

काल्पनिक अर्थहीनता

प्रश्न :

असा एक प्रश्न आहे जो आपणाला नक्कीच अर्थहीन वाटेल :
जर $8\times8=54$ तर $84=?$

सकृतदर्शनी जरी हा प्रश्न विचित्र असला तरी त्यामध्ये तथ्य नाही असे मुळीच म्हणता येणार नाही. समीकरणाच्या साहाय्याने हा प्रश्न सोडविता येईल. प्रयत्न करून पहा.

उत्तर :

आपण असा अंदाज बांधलाच असेल की या प्रश्नामध्ये अंतर्भूत असलेल्या संख्या दशांश पद्धतीने लिहिलेल्या नाहीत, अन्यथा 84=? हा प्रश्न विचित्र ठरला असता. असे समजू की या अज्ञात मोजणी पद्धतीचा पाया आहे x. याचा अर्थ "84" ही संख्या पुढील पद्धतीने लिहिली जाईल :

$$84 = 8x + 4.$$

अशाच प्रकारे

$$54 = 5x + 4.$$

आता $8 \times 8 = 5x + 4$ म्हणजेच दशांश पद्धतीनुसार $64 = 5x + 4$ ज्यावरून आपणाला x ची किंमत कळते $x = 12$.

आता पुढील समीकरणात x ची किंमत घालू

$$«84» = 8x + 4$$
$$84 = 8 \times 12 + 4 = 100$$

म्हणजेच, जर $8 \times 8 = «54»$ असेल तर $«84» = 100$ याच पद्धतीने अशा प्रकारची इतरही उदाहरणे पाहता येतील जसे, जर $5 \times 6 = 33$, तर $100 = ?$ उत्तर : 81

समीकरणे विचार करतात

समीकरणे आपल्यापेक्षाही अधिक नीट विचार करू शकतात या गोष्टीवर जर आपला विश्वास नसेल तर पुढील कोडे सोडवून पहा.

जर वडिलांचे वय आहे 32 वर्षे व मुलाचे 5 वर्षे तर आणखी किती वर्षांनी वडिलांचे वय मुलाच्या वयापेक्षा 10 पटीने जास्त होईल ?

हा अज्ञात कालखंड x आहे असे मानू. x वर्षांनंतर वडिलांचे वय असेल $32+x$ आणि मुलाचे $5+x$. वडिलांचे वय मुलाच्या वयापेक्षा 10 पटीने जास्त असायला हवे म्हणून आपणाला पुढील समीकरण मांडायला हवे :

$$32+x=10\ (5+x).$$

हे समीकरण सोडवून आपणाला $x=-2$ ठरविता येते.

"—2 वर्षांनी" याचा अर्थ "दोन वर्षांपूर्वी" जेव्हा आपण समीकरण मांडले तेव्हा आपण या गोष्टीचा विचार केला नाही की वडिलांचे वय भविष्यकाळामध्ये कधीच मुलाच्या वयापेक्षा 10 पटीने जास्त होऊ शकत नाही. ही गोष्ट फक्त भूतकाळातच शक्य आहे. समीकरणाने मात्र या गोष्टीवर विचार केला आणि आपणाला आपली चूक दाखवून दिली.

जिज्ञासा आणि आश्चर्य

समीकरणे सोडवित असताना कधी कधी अशी उत्तरे मिळतात की ज्यामुळे अननुभवी गणितज्ञ चांगलेच गोंधळात पडतात. या प्रकारची काही उदाहरणे पाहू.

१. अशी दोनअंकी संख्या शोधून काढावयाची आहे की ज्यामध्ये दशक दर्शविणारा अंक एककाच्या स्थानी असलेल्या अंकापेक्षा 4 ने कमी असेल, जर या दोन्ही अंकांच्या स्थानांची अदलाबदल केली — म्हणजे ही संख्या उलट लिहिली — तर जी संख्या प्राप्त होते त्यामधून ही अज्ञात संख्या वजा केली असता बाकी 27 राहतात.

या अज्ञात संख्येमध्ये दशकाच्या स्थानी असलेला अंक x आहे व एककाच्या स्थानी y हा अंक आहे असे मानू. आता आपण समीकरण मांडू शकतो :

$$x=y-4$$
$$(10y+x)-(10x+y)=27.$$

दुसऱ्या समीकरणामध्ये x ची किंमत घातल्यास :

$$10y+y-4-[10(y-4)+y]=27,$$

आणि नंतर हे समीकरण सोडविल्यास :

$$36=27.$$

असे विचित्र उत्तर प्राप्त होते.

x आणि y ची किंमत आपणाला मिळालेली नाही परंतु 36=27 . . . याचा अर्थ काय ?

याचा अर्थ एवढाच की वरील सर्व अटी पूर्ण करणारी कोणतीही संख्या अस्तित्वात नाही आणि आपण वर पाहिलेली सर्व समीकरणे एकमेकांशी विसंगत आहेत.

वस्तुस्थिती अशी आहे की : पहिल्या समीकरणातील दोन्ही बाजूंना 9 ने गुणल्यास आपणाला दिसून येईल की

$$9y-9x=36,$$

आणि दुसऱ्या बाजूस (कंस सोडवून) :

$$9y-9x=27.$$

9y — 9x या एकाच समीकरणाची किंमत एके ठिकाणी 36 आहे तर दुसऱ्या ठिकाणी 27! ही गोष्ट अशक्य आहे कारण $36\neq27$

अशाच प्रकारची समस्या पुढील समीकरणे सोडविताना निर्माण होते.

$$x^2y^2=8,$$
$$xy=4.$$

पहिल्या समीकरणाला जर दुसऱ्या समीकरणाने भाग दिला :

$$xy=2,$$

व प्राप्त झालेल्या समीकरणाची दुसऱ्या समीकरणाशी तुलना केल्यास आपणाला दिसून येईल की

$$\begin{cases}xy=4,\\xy=2,\end{cases}$$

म्हणजे 4=2 याचा अर्थ असा की वरील अटींची पूर्तता करणाऱ्या संख्या अस्तित्वात नाहीत.

२. वरील कोड्यातील अटींमध्ये थोडा फार बदल केला तर अगदी वेगळाच आश्चर्याचा धक्का आपणाला बसेल. असे समजू की दशकाच्या स्थानावर असलेला अंक एककाच्या स्थानावरील अंकापेक्षा 3 ने कमी आहे (4 ने नव्हे) व इतर अटी तशाच ठेवू. तर ही संख्या कोणती असेल?

आता समीकरण मांडू. दशकाच्या स्थानावरील अंक x आहे असे मानल्यास एककाच्या स्थानावरील अंक $x+3$ असेल. कोड्याचा बीजगणिताच्या भाषेतील अनुवाद असेल:

$$10(x+3)+x-[10x+(x+3)]=27.$$

वरील समीकरण सोडविल्यास 27=27 हे उत्तर आपणास मिळेल.

इथपर्यंत तरी सारे काही बरोबर आहे असाच याचा अर्थ होतो परंतु यामुळे x ची किंमत आपणाला कळत नाही. कोड्यातील अटी पूर्ण करणारी संख्या अस्तित्वात नाही असा याचा अर्थ होतो काय?

मुळीच नाही. उलट याचा अर्थ असा होतो की x ची किंमत आपणाला ठाऊक नसली, ती कितीही असली तरी आपण मांडलेले समीकरण बरोबर आहे. खरोखरच या गोष्टीची आपणाला सहजपणे खात्री करून घेता येते. कोणतीही दोनअंकी संख्या, जीमध्ये दशकाच्या स्थानावरील अंक एककाच्या स्थानावरील अंकापेक्षा 3 ने कमी आहे, कोड्यातील सर्व अटींची पूर्तता करते:

$$14+27=41, \quad 47+27=74,$$
$$25+27=52, \quad 58+27=85,$$
$$36+27=63, \quad 69+27=96.$$

३. अशी एक तीनअंकी संख्या शोधून काढा की जिची वैशिष्टचे पुढीलप्रमाणे असतील:

1. दशकाच्या स्थानावर 7 हा अंक असेल;

2. शतकाच्या स्थानावरील अंक एककाच्या स्थानावरील अंकापेक्षा 4 ने कमी असेल ;

3. जर हे तिन्ही अंक उलटया क्रमाने मांडले तर जी नवी संख्या प्राप्त होईल ती मूळ संख्येपेक्षा 396 ने जास्त असेल.

एककाच्या स्थानावरील अंक x आहे असे समजून प्रथम समीकरण मांडू.

$$100x+70+x-4-[100(x-4)+70+x]=396.$$

हे समीकरण सोडविल्यास 396=396 हे उत्तर मिळेल.

या उत्तराचा अर्थ काय ते आता वाचकांना ठाऊक झाले असेलच. याचा अर्थ असा की कोणतीही तीनअंकी संख्या, जीमध्ये पहिला अंक तिसऱ्या अंकापेक्षा* 4 ने कमी असेल, उलटी लिहिल्यास मिळणारी नवी संख्या मूळ संख्येपेक्षा 396 ने जास्त असते.

आतापर्यंत आपण काहीशी पुस्तकी, कृत्रिम स्वरूपाची कोडी पहात होतो, त्यामागील मूळ हेतू हा होता की समीकरणे कशी मांडवीत व कशी सोडवावीत याची माहिती करून घेणे. आता आपण दैनंदिन जीवनातील, व्यावहारिक जीवनातील काही उदाहरणे घेऊ.

केशकर्तनालयात

प्रश्न :

केशकर्तनालयामध्ये बीजगणिताची आवश्यकता आहे काय? असे आढळून येते की कधी कधी तशी गरज भासते. निदान माझा अनुभव तरी तसा आहे. एकदा केशकर्तनालयामध्ये न्हावी माझ्याजवळ आला आणि त्याने एक विलक्षण विनंती केली :

---

* दशकाच्या स्थानावर असलेल्या अंकाची भूमिका या ठिकाणी महत्त्वाची नाही.

—आमचे एक कोडे सोडवाल काय? काही केल्या ते आमच्याकडून सुटत नाही.

—या समस्येपायी आम्ही किती द्रव वाया घालविला? —दुसरा न्हावी उद्‌गारला.

—एवढे कठीण असे कोणते कोडे आहे? —मी विचारले.

—आमच्याकडे हायड्रोजन पॅरॉक्साईडचे दोन द्राव आहेत: एक आहे 30 टक्के संहतिचा तर दुसरा 3 टक्के संहतिचा. हे दोन्ही अशा प्रकारे मिळवायचे आहेत की मिश्रण 12 टक्के संहतिचे व्हावे. आम्हाला काही केल्या हे मिश्रण बनविता येत नाही...

मला त्यांनी एक कागद दिला आणि मी त्यांना हवे असलेले दोन्ही द्रावांचे प्रमाण काढून दिले.

हे काम अगदीच सोपे होते. मी ते कसे केले असावे?

उत्तर:

जरी अंकगणिताच्या साहाय्याने हे कोडे सोडविता येत असले तरी बीजगणिताची भाषा या ठिकाणी जास्त उपयोगी पडते; त्यामुळे कोडे सोपे बनते व चटकन सुटते. असे समजू की 12 टक्के संहतिचे मिश्रण बनविण्यासाठी x ग्रॅम 3 टक्के संहतिचा आणि y ग्रॅम 30 टक्के संहतिचा द्राव लागतो. पहिल्या द्रावामध्ये यामुळे $0.03x$ ग्रॅम शुद्ध हायड्रोजन पॅरॉक्साईड असेल तर दुसऱ्या द्रावामध्ये $0.3y$ आणि एकूण $0.03x + 0.3y$ ग्रॅम.

परिणामी $0.12(x + y)$ ग्रॅम शुद्ध पॅरॉक्साईड असेल असा $(x + y)$ ग्रॅम द्राव मिळेल.

आता आपणाला पुढील समीकरण मांडता येईल:

$$0.03x+0.3y=0.12(x+y)$$

हे समीकरण सोडविल्यास

$$x=2y$$

म्हणजे 3 टक्के संहतिचा द्राव 30 टक्के संहतिच्या द्रावापेक्षा दुप्पट घेतला पाहिजे असे आढळून येईल.

ट्राम आणि पादचारी

ट्रामगाडीच्या मार्गाच्या बाजूने चालत असता एक गोष्ट माझ्या नजरेस आली की प्रत्येक 12 मिनिटांनी एक ट्राम माझ्या मागून येत आहे तर प्रत्येक चार मिनिटांनी समोरून येणारी ट्राम दिसत आहे. मी आणि ट्राम एकसारखे गतिमान आहोत.

आपल्या अंतिम स्थानकांपासून या ट्रामगाड्या एका पाठोपाठ एक याप्रमाणे किती मिनिटांनी सुटत असाव्यात?

उत्तर :

असे समजू की प्रत्येक x मिनिटांनी ट्रामगाड्या आपल्या अंतिम स्थानकापासून सुटत आहेत, याचा अर्थ असा की ज्या ठिकाणी मी एक ट्राम पाहतो त्या ठिकाणी x मिनिटांनी पुढची ट्राम येते. जर ही गाडी मला मागे टाकते तर बाकी 12 मिनिटात ही गाडी त्या ठिकाणी पोहोचायला हवी ज्या ठिकाणी मी 12 मिनिटानी पोहोचेन. म्हणजेच 1 मिनिटामध्ये मी जेवढे अंतर पार करतो तेवढे अंतर ट्रामगाडी $\frac{12-x}{12}$ मिनिटांमध्ये पार करते.

जर ट्रामगाडी समोरून येत असेल तर आपल्या पूर्वीच्या ट्रामगाडी-नंतर चार मिनिटांनी ती मला भेटत असेल व त्यानंतरच्या बाकी $(x-4)$ मिनिटांमध्ये मी चार मिनिटात जेवढे अंतर पार केले तेवढे अंतर ती पार करते. म्हणजेच, मी 1 मिनिटामध्ये जेवढे अंतर पार करतो तेवढेच अंतर समोरून येणारी ट्रामगाडी $\frac{x-4}{4}$ मिनिटांमध्ये पार करते.

परिणामी, खालील समीकरण प्राप्त होते :

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4}.$$

यावरून $x=6$. म्हणजेच प्रत्येक 6 मिनिटांनी अंतिम स्थान-काहून ट्रामगाड्या सुटतात.

वरील कोडे पुढील प्रकारेदेखील सोडविता येईल (अंकगणिताच्या

साहाय्याने). एकापाठोपाठ जाणाऱ्या दोन ट्रामगाड्यांदरम्यानचे अंतर a आहे असे समजू. म्हणजे माझ्या मधील आणि समोरून येणाऱ्या ट्राममधील अंतर मिनिटास $\frac{a}{4}$ इतके कमी होते (कारण नुकत्याच गेलेल्या ट्राममधील आणि पुढील येणाऱ्या ट्राममधील अंतर a आहे व ते अंतर ट्राम व मी 4 मिनिटात पार करतो). जर मागून येणाऱ्या ट्रामने मला गाठले तर आम्हा दोहोंमधील अंतर प्रत्येक मिनिटास $\frac{a}{12}$ ने कमी होत जाते. आता असे समजू की मी 1 मिनिट पुढे चाललो आणि मग पुन्हा मागे वळून 1 मिनिट चाललो (म्हणजेच मुळच्या जागेवर आलो), तर समोरून माझ्या दिशेने येणारी ट्राम आणि माझ्या दरम्यानचे अंतर पहिल्या मिनिटास $\frac{a}{4}$ इतके घटते आणि दुसऱ्या मिनिटास $\frac{a}{12}$ इतके. एकंदरीत दोन मिनिटांमध्ये $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{a}{3}$ इतके घटते. जरी मी चाललो नसतो व केवळ एका जागीच उभा राहिलो असतो तरी इतकेच अंतर घटले असते, कारण शेवटी मी मागे परतलो होतो. जर मी आपल्या जागेवरून हललो नसतो तर 1 मिनिटामध्ये (2 नव्हे) ट्राम $\frac{a}{3}\div 2=\frac{a}{6}$ इतकी माझ्याजवळ आली असती, आणि a हे संपूर्ण अंतर तिने 1 मिनिटात पार केले असते. याचा अर्थ असा होतो की एकाच जागी स्थिर राहून निरीक्षण केल्यास प्रत्येक सहा मिनिटांनी ट्राम गाडी जात असल्याचे दिसून येईल.

जहाज आणि तराफा

प्रश्न :

नदीच्या प्रवाहाच्या दिशेने असलेल्या B या शहराकडे A शहरापासून निघालेले जहाज (कोठेही न थांबता) 5 तासात पोहोचले. परतीच्या मार्गावर, प्रवाहाविरुद्ध जाताना जहाजाला 7 तास खर्च करावे लागले (पूर्वी इतक्याच वेगाने व कोठेही न थांबता). A शहरापासून B शहरापर्यंत पोहोचवयास तराफ्याला किती वेळ लागेल? तराफ्याचा वेग नदीच्या प्रवाहाच्या वेगाइतकाच आहे.

उत्तर :

असे समजू की A पासून B पर्यंत पोहोचावयास जहाजाला स्थिर पाण्यात (म्हणजेच स्वतःच्या वेगाने) x (तास) इतका वेळ लागतो तर तराफ्यांना y. म्हणजे एका तासात जहाज AB मार्गावर $\frac{1}{x}$ अंतर पार करेल तर तराफा $\frac{1}{y}$ इतके. म्हणून B शहराच्या दिशेने (म्हणजेच प्रवाहाच्या दिशेने) जहाज AB मार्गावर एका तासात $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ इतके अंतर पार करेल तर वरच्या दिशेने (प्रवाहाविरुद्ध) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. कोड्यात सांगितल्याप्रमाणे आपणाला ठाऊक आहे की खालच्या दिशेने जहाज एका तासात $\frac{1}{5}$ अंतर पार करते तर वरच्या दिशेने $\frac{1}{7}$, यावरून पुढील समीकरणे प्राप्त होतात :

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

वरील समीकरणे सोडविण्यासाठी फक्त पहिल्या समीकरणातून दुसरे समीकरण वजा करावे लागेल म्हणजे पुढील उत्तर मिळेल

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35},$$

ज्यावरून $y=35$.

35 तास लागतील.

दोन कॉफी पात्रे

उपहारगृहातील कॉफी तयार करण्याच्या दोन पात्रांचा आकार समान असून एकाच धातूपासून ती बनविण्यात आलेली आहेत. दोन्हीही पात्रे कॉफीने भरलेली आहेत. पहिल्या पात्राचे वजन 2 कि. ग्रॅ. असून त्याची उंची आहे 12 सें. मी. दुसरे पात्र 1 कि. ग्रॅ. वजनाचे आहे

व त्याची उंची 9.5 सें. मी. आहे, तर पात्रातील केवळ कॉफीचे वजन किती असेल?

उत्तर :

असे समजू की मोठ्या पात्रातील केवळ कॉफीचे वजन x आहे तर लहान पात्रातील कॉफीचे y. पात्रांचे वजन अनुक्रमे z व t आहे असे मानू. यावरून आपणाला खालील समीकरणे मिळतात.

$$\begin{cases} x+z=2, \\ y+t=1. \end{cases}$$

कॉफी पात्रातील कॉफीच्या वजनाचा संबंध पात्रांच्या आकारमानांशी (व्यापकतेशी) येतो त्यामुळे :

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9.5^3}\approx 2.02 \text{ किंवा } x=2.02y.$$

रिकाम्या पात्रांच्या वजनाचा संबंध त्यांच्या संपूर्ण पृष्ठभागाशी म्हणजेच त्यांच्या उंचीच्या वर्गाशी येतो म्हणून

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9.5^2}\approx 1.60 \text{ किंवा } z=2.60t.$$

x आणि z ची किंमत पहिल्या समीकरणात घातल्यास आपणाला पुढील समीकरणे मिळतात :

$$\begin{cases} 2.02y+1.60t=2, \\ \quad y+t=1. \end{cases}$$

समीकरण सोडविल्यास आपणाला y आणि t ची किंमत कळते :

$$y=\frac{20}{21}=0.95, \qquad t=0.05$$

यावरून,

$$x=1.92, \qquad z=0.08.$$

पात्राशिवाय कॉफीचे वजन : मोठ्या पात्रातील – 1.92 कि. ग्रॅ., छोट्या पत्रातील – 0.94 कि. ग्रॅ.

उत्तर :

सायंकाळच्या नृत्यकार्यक्रमामध्ये 20 नर्तक होते. मारीयाने 7 युवकांशी नाच केला, ओल्गाने – 8 जणांशी, वेराने 9 जणांशी ... अशाच प्रकारे निनाने, सर्व नर्तकांशी नाच केला. या कार्यक्रमामध्ये किती पुरुष नर्तक उपस्थित होते?

प्रश्न :

हे कोडे अगदीच सोपे आहे. मुलांची नव्हे तर आपण प्रथम उपस्थित मुलींची संख्या शोधून काढू. समजा या कार्यक्रमाला x मुली उपस्थित होत्या.

1-ली मारीया	जिने	6 + 1	मुलांशी नाच केला
2-री ओल्गा	»	6 + 2	»
3-री वेरा	»	6 + 3	»
. . . .	. . . .		.
x-वी निना	»	6 + x	»

यावरून आपण पुढील समीकरण मांडू शकतो :

$$y+(6+x)=20.$$

ज्यावरून

$$x=7,$$

म्हणजे 20 — 7 = 13 मुले या कार्यक्रमास उपस्थित होती.

सागरी हेरगिरी

प्रश्न १ :

एका ताफ्यासह सागरामध्ये हेरगिरी करीत असलेल्या जहाजाला ताफ्याच्या हालचालीच्या दिशेच्या 70 मैलाच्या प्रदेशाचे निरीक्षण

करण्याचा आदेश देण्यात आला. ताफ्याचा वेग होता ताशी 35 मैल तर हेरगिरी करणाऱ्या जहाजाचा वेग होता ताशी 70 मैल. किती वेळामध्ये हे जहाज परत आपल्या ताफ्यात येऊन पोहोचेल?

उत्तर :

असे समजू की हे हेरगिरी करणारे जहाज x तासात आपल्या ताफ्यात परत येईल. या दरम्यान ताफा 35x मैल प्रवास करेल तर हेरगिरी करणाऱ्या जहाजाने 70x मैल अंतर पार केले असेल. या जहाजाने 70 मैलाचा प्रवास पुढच्या दिशेने केला. आणि त्यातीलच काही भागात परतीचा प्रवास केला; ताफ्याने या मार्गावरील बाकी प्रवास केला. दोहोंचा मिळून एकूण प्रवास $70x+35x$ इतका झाला जो 2×70 मैल इतका होता. यावरून आपणाला पुढील समीकरण मांडता येते

$$70x+35x=140,$$

ज्यावरून

$$x=\frac{140}{105}=1\frac{1}{3} \text{ तास.}$$

याचा अर्थ 1 तास 20 मिनिटांनी आपल्या ताफ्यात परत येईल.

प्रश्न २ :

आपल्या ताफ्याच्या पुढे जाऊन परिस्थितीचा अंदाज घेण्याचा आदेश हेरगिरी करणाऱ्या जहाजाला देण्यात आला. 3 तासांनंतर हे जहाज आपल्या ताफ्यात परत येणे आवश्यक होते. जर या जहाजाचा वेग ताशी 60 नॉट असेल व ताफ्याचा वेग ताशी 40 नॉट असेल तर ताफा सोडल्यानंतर किती वेळाने हेरगिरी करावयास गेलेल्या जहाजाने परतीचा प्रवास सुरू केला पाहिजे?

उत्तर :

असे समजू की हेरगिरी करावयास गेलेले जहाज x तासांनी ताफ्यात परत आले पाहिजे म्हणजेच ते ताफ्यापासून x तास दूर राहील

आणि ताफ्याच्या दिशेने 3 — x तास प्रवास करेल. जेव्हा ताफ्यातील इतर सर्व जहाजे एका दिशेने जात होती तेव्हा x तासामध्ये हेरगिरी करणारे जहाज ताफ्यापासून

$$60x - 40x = 20x$$

इतके अंतर अधिक दूर जाऊ शकले.

आपल्या ताफ्याकडे परतताना जहाजाने 60 (3 — x) इतके अंतर पार केले. स्वत: ताफ्याने 40 (3 — x) इतके अंतर पार केले होते. जहाजाने व ताफ्याने मिळून 10x पार केले. यावरून :

$$60(3 - x) + 40(3 - x) = 20x$$

त्या अर्थी

$$x = 2\frac{1}{2}.$$

ताफा सोडल्यानंतर 2 तास 30 मिनिटांनी हेरगिरी करणाऱ्या जहाजाने परतीचा प्रवास सुरू केला असला पाहिजे.

सायकल शर्यतीच्या मैदानावर

प्रश्न :

सायकल शर्यतीच्या वर्तुळाकार मैदानावर दोन सायकलस्वार स्थिर गतीने सायकल चालवित आहेत. जेव्हा ते एकमेकांविरुद्ध दिशेने सायकल चालवितात तेव्हा प्रत्येक 10 सेकंदांनी ते एकमेकांना भेटतात आणि जेव्हा एकाच दिशेने दोघेही सायकल चालवितात तेव्हा प्रत्येक 170 सेकंदांनी एक दुसऱ्याला मागे टाकतात. जर वर्तुळाकार मार्गाची लांबी 170 मीटर असेल तर प्रत्येक सायकलस्वाराचा वेग काय?

उत्तर:

जर पहिल्या सायकलस्वाराचा वेग x असेल तर 10 सेकंदामध्ये तो 10x मीटर पार करेल. दुसरा सायकलस्वार त्याच्याविरुद्ध दिशेने एका भेटीपासून दुसऱ्या भेटीपर्यंत वर्तुळाचा बाकी भाग, म्हणजेच

170 — 10x मीटर पार करेल. जर दुसऱ्या सायकलस्वाराचा वेग y असेल तर हे अंतर 10y मीटर असेल म्हणून,

$$170 - 10x = 10y$$

जर सायकलस्वार एकापाठोपाठ एक याप्रमाणे जात असतील तर 170 सेकंदामध्ये पहिला सायकलस्वार 170x मीटर पार करतो तर दुसरा सायकलस्वार 170y मीटर. जर पहिल्या सायकलस्वाराचा वेग दुसऱ्यापेक्षा जास्त असेल तर एका भेटीपासून दुसऱ्या भेटीपर्यंत तो दुसऱ्या सायकलस्वारापेक्षा एक फेरी अधिक मारेल; म्हणजेच:

$$170x - 170y = 170.$$

ही दोन समीकरणे सोडविल्यास:

$$x + y = 17, \quad x - y = 1,$$

ज्यावरून

$$x = 9, \quad y = 8$$

म्हणजेच पहिल्या सायकलस्वाराचा वेग सेकंदास 9 मीटर आहे तर दुसऱ्या सायकलस्वाराचा 8 मीटर.

मोटरसायकलींची शर्यत

प्रश्न :

मोटरसायकलींच्या शर्यतीमध्ये एकाच वेळी शर्यतीस आरंभ केलेल्या तीन मोटरसायकलींपैकी दुसरी मोटरसायकल पहिल्या मोटरसायकलच्या वेगापेक्षा ताशी 15 कि. मी. कमी वेगाने आणि तिसऱ्या मोटरसायकलपेक्षा ताशी 3 कि. मी. अधिक वेगाने जात होती. शर्यतीच्या मार्गाच्या शेवटच्या टप्प्यावर ही मोटरसायकल पहिल्या मोटरसायकलपेक्षा 12 मिनिट वेळाने आणि तिसऱ्या मोटरसायकलपेक्षा 3 मिनिट अगोदर येऊन पोहोचली. मार्गावर कोठेही या मोटरसायकली थांबल्या नाहीत. तर:

1. या शर्यतीच्या मार्गाची लांबी किती ?
2. प्रत्येक मोटरसायकलीचा वेग काय ?
3. प्रत्येक मोटरसायकल किती वेळ धावत होती ?

उत्तर :

एकंदरीत आपणाला सात निरनिराळ्या अज्ञात किंमती शोधून काढावयाच्या असल्या तरी संपूर्ण कोडे सोडविण्यासाठी केवळ दोन किंमती पुरेशा आहेत, म्हणून दोन अज्ञात संख्यांच्या आधारे आपण दोन समीकरणे मांडू.

दुसऱ्या मोटरसायकलचा वेग x आहे असे समजू म्हणून पहिल्या मोटरसायकलचा वेग $x+15$ व तिसरीचा $x-3$ असेल.

शर्यत – मार्गाची लांबी y आहे असे मानल्यास शर्यतीमध्ये धावण्याचा काल असेल :

पहिल्या मोटरसायकलसाठी . . . . . . $\frac{y}{x+15}$,

दुसऱ्या » . . . . $\frac{y}{x}$,

तिसऱ्या » . . . . $\frac{y}{x-3}$.

आपणास ठाऊक आहे की दुसरी मोटरसायकल शर्यत – मार्गावर पहिल्या मोटरसायकलपेक्षा 12 मिनिटे (म्हणजेच $\frac{1}{5}$ तास) अधिक काळ होती. म्हणून

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}.$$

तिसरी मोटारसायकल शर्यत-मार्गावर दुसऱ्या मोटरसायकलपेक्षा 3 मिनिटे (म्हणजे $\frac{1}{20}$ तास) अधिक काळ होती. यावरून,

$$\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}.$$

यापैकी दुसऱ्या समीकरणास चारने गुणून ते पहिल्या समीकरणामधून

वजा करू :

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}-4\left(\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}\right)=0.$$

या समीकरणातील सर्व पदांना y ने भाग देऊ (आपणाला ठाऊक आहे की 0 ची किंमत y नाही) आणि त्यानंतर आपणाला x ची किंमत ठाऊक होईल :

$$(x+15)(x-3)-x(x-3)-4x(x+15)+4(x+15)(x-3)=0,$$

कंस सोडविल्यास :

$$3x-225=0,$$

ज्यावरून

$$x=75.$$

x ची किंमत आता ठाऊक असल्याने ती पहिल्या समीकरणात घालू :

$$\frac{y}{75}-\frac{y}{90}=\frac{1}{5}$$

ज्यावरून y=90. म्हणजे तिन्ही मोटरसायकलींचा वेग अनुक्रमे ताशी 90, 75 आणि 72 कि. मी. आहे.

संपूर्ण शर्यत – मार्गाची लांबी आहे 90 कि. मी.

एकूण शर्यतीच्या मार्गास प्रत्येक मोटरसायकलच्या वेगाने भागल्यास त्या किती काळ मार्गावर होत्या ते ठाऊक होईल :

पहिली मोटरसायकल . . . . 1 तास,
दुसरी » . . . . . . 1 तास 12 मिनिटे,
तिसरी » . . . . . . 1 तास 15 मिनिटे.

अशा प्रकारे आपणाला सात अज्ञात गोष्टी शोधून काढाव्या लागल्या.

सरासरी वेग

प्रश्न :

एका शहरापासून दुसऱ्या शहरास एक गाडी ताशी 60 कि. मी.

वेगाने पोहोचली. परतीच्या मार्गावर गाडीचा वेग ताशी 40 कि. मी. होता, तर गाडीचा सरासरी वेग काय?

उत्तर :

वरवर सोपे दिसणारे हे कोडे आपणाला नक्कीच गोंधळात टाकेल. सरासरी कशी काढावयाची ते आपणाला ठाऊक असल्याने आपण $\frac{60+40}{2}$ हा अंकगणिती हिशोब मांडाल.

जर गाडीला दोन्ही बाजूच्या प्रवासास सारखाच वेग लागला असता तर हे "सोपे" उत्तर बरोबर ठरले असते. परंतु कोड्यातील प्रश्नावरून स्पष्टपणे दिसत आहे की परतीचा प्रवास गडीने ताशी 40 कि. मी. म्हणजेच कमी वेगाने केला असल्यामुळे परतण्यास जास्त वेळ लागला आहे. ही गोष्ट ध्यानात घेतल्यास 50 कि. मी. हे वरील उत्तर चुकीचे आहे.

खरोखरच, समीकरण आपणाला अगदी वेगळेच उत्तर देते. दोन्ही शहरांच्या दरम्यानचे अंतर l आहे असे समजल्यास समीकरण मांडणे विशेष कठीण नाही.

गाडीचा सरासरी वेग x मानल्यास आपणाला पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{60}+\frac{l}{40}.$$

l ची किंमत 0 नाही हे आपणास ठाऊक असल्यामुळे आपण वरील समीकरणास l ने भाग देऊ :

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40},$$

ज्यावरून

$$x=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}=48.$$

म्हणून गाडीचा सरासरी वेग 50 नव्हे तर ताशी 48 कि. मी. होता.

वेगवान गणकयंत्रे

"मनोरंजक बीजगणिता"मध्ये समीकरणाविषयी आपण जी चर्चा केली त्या चर्चेतून गणकयंत्रांद्वारे सोडविल्या जाणाऱ्या समीकरणांसंबंधीचे विवेचन आपणास वगळता येणार नाही. वर, आपण पाहिले आहेच की गणकयंत्रे बुद्धिबळ खेळू शकतात. गणिती गणकयंत्रे दुसऱ्या प्रकारच्या क्रियासुद्धा करतात, उदा. एका भाषेमधून दुसऱ्या भाषेमध्ये अनुवाद यासारख्या. यासाठी फक्त अनुरूप कार्यक्रम तयार करावा लागतो ज्यानुसार ही गणकयंत्रे काम करतात.

या ठिकाणी, अर्थातच, आपण बुद्धिबळ खेळण्यासाठी किंवा एका भाषेतून दुसऱ्या भाषेमध्ये अनुवाद करण्यासाठी कार्यक्रम कसे तयार केले जातात ते पाहणार नाही. आपण फक्त दोन अतिशय सोप्या कार्यक्रमांच्या निर्मितीवर चर्चा करू. यापूर्वी सर्वप्रथम आपणाला गणकयंत्राची थोडीफार रचना जाणून घ्यावी लागेल.

सेकंदास हजारो, गणिती क्रिया पार पाडणाऱ्या उपकरणाविषयी पहिल्या प्रकरणामध्ये आपण चर्चा केलीच आहे. गणकयंत्रामधील या भागाला अंकगणिती भाग असे म्हणतात. याव्यतिरिक्त गणकयंत्रामध्ये संपूर्ण यंत्राच्या कार्यावर "नजर" ठेवणारी नियंत्रण यंत्रणा आणि तथाकथित स्मरणशक्ती असते. स्मरणशक्ती किंवा स्मरणात ठेवणारी यंत्रणा म्हणजे संख्या आणि संदेशांचे जतन करून ठेवणारे कोठार असते. व शेवटी गणकयंत्रामध्ये नवी अंकरूपी माहिती ग्रहण करणारी व तयार उत्तरे बाहेर पाठविणारी खास यंत्रणा असते. ही तयार उत्तरे गणकयंत्र (दशांश पद्धतीनुसार) खास कागदी पुठ्ठ्यावर छापते व आपणाला देते.

आपणा सर्वांना ठाऊक आहे की तबकडी किंवा चुंबकीय फितीवर ध्वनी मुद्रित करता येतो व जेव्हा हवा असेल तेव्हा ऐकता येतो. परंतु तबकडीवर फक्त एकदाच ध्वनी मुद्रित करता येतो. दुसऱ्यांदा ध्वनी मुद्रित करावयाचा असेल तर फक्त नव्या तबकडीवरच तो करता येईल. चुंबकीय फितींच्या बाबतीत गोष्ट वेगळी आहे. चुंबकत्वाच्या साहाय्याने नको असलेले ध्वनीमुद्रण 'पुसून' टाकता येते व त्या जागी

नवे मुद्रण करता येते. एकाच फितीवर अशा प्रकारे अनेकदा मुद्रण करता येते.

गणकयंत्रातील स्मरणशक्ती – माहिती लक्षात ठेवणारी यत्रणा याच तत्त्वावर आधारीत असते. संख्या आणि संकेतांचे विद्युत, चुंबकीय किंवा तांत्रिक संकेतांच्या साहाय्याने खास फितीवर अथवा इतर उपकरणावर मुद्रण केले जाते. आवश्यकतेनुसार मुद्रित संख्या वाचता येते व जर तिची आवश्यकता नसेल तर 'पुसून' टाकता येते आणि त्या जागी नवी संख्या किंवा संकेत मुद्रित केला जातो. संख्या अथवा संकेताच्या "स्मरणा"वर आणि "वाचना"वर फक्त एका सेकंदाचा लक्षावधी भाग इतका वेळ खर्च केला जातो.

"स्मरण" यंत्रणेमध्ये हजारो घट असू शकतात व प्रत्येक घटामध्ये कित्येक घटक असतात, उदा. चुंबकीय घटक. द्वयोर्घात पद्धतीनुसार नोंदणी करावयाची झाल्यास आपणाला असे म्हणता येईल की प्रत्येक चुंबकीय घटक 1 या अंकाचे, प्रत्येक अचुंबकीय घटक 0 या अंकाचे मुद्रण करतो. उदाहरणार्थ असे समजू की प्रत्येक घटामध्ये 25 घटक आहेत (किंवा 25 "द्वयोर्घाती अंक" आहेत) व घटाचा पहिला अंक संख्येचे चिन्ह (+ किंवा —) दर्शवितो, त्या नंतरचे 14 अंक संख्येचे पूर्ण भाग दर्शवितात व शेवटचे 10 अंक अपूर्णांक दर्शवितात. आकृती क्रमांक 9 मध्ये आपणाला प्रत्येकी 25 अंक असलेले दोन स्मरण – घट दिसत आहेत. चुंबकीय घटक + चिन्हांकित आहेत तर अचुंबकीय घटक – चिन्हांकित आहेत. प्रथम आकृतीतील वरील घट विचारात घेऊ. या ठिकाणची उभी विभाजक रेघ संख्येचे चिन्ह दर्शविणारा पहिला अंक बाकी अंकांपासून वेगळा करते. या घटावर द्वयोर्घात पद्धतीने +1011.01 किंवा आपल्या दैनंदिन जीवनातील दशांश पद्धतीने 11.25 ही संख्या मुद्रित करण्यात आलेली आहे.

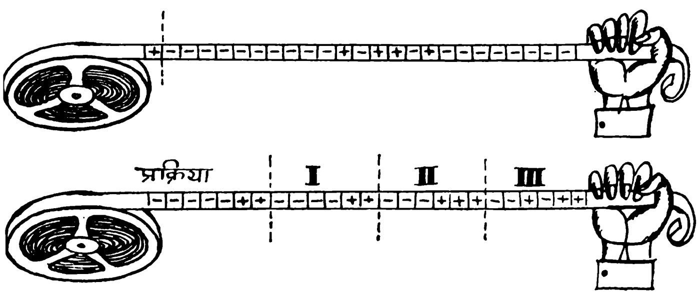
संख्याव्यतिरिक्त स्मरण – घटांमध्ये आदेशांची नोंदणी केली जाते, ज्यांच्या द्वारे कार्यक्रम बनविण्यात येतो. तथाकथित त्रिस्थानी यंत्रामध्ये आदेश कसे दिले जाताज ते आता पाहू. या ठिकाणी आदेशांची नोंदणी करण्यासाठी स्मरण – घटाचे चार भाग केले जातात (आकृती 9 मध्ये उभ्या विभाजक रेघांद्वारे ते दर्शविण्यात आले आहेत). पहिला भाग क्रिया दर्शवितो व या क्रिया क्रमांकांच्या संख्येच्या साहाय्याने नोंदविल्या जातात.

उदाहरणार्थ,

बेरीज – क्रिया 1,
वजाबाकी – क्रिया 2,
गुणाकार – क्रिया 3, इत्यादी.

आदेशांची नोंदणी आधी केली जाते: घटाचा पहिला भाग – क्रिया-क्रमांक, दुसरा व तिसरा भाग – घट क्रमांक (स्थाने); ज्यामधून ही क्रिया पार पाडण्यासाठी संख्या घेतल्या जातात, आणि चौथा भाग – प्रापक घट क्रमांक, ज्या ठिकाणी प्राप्त निर्णय, परिणाम अथवा उत्तरे पाठविली जातात. उदाहरणार्थ, आकृती क्र. 9 (खालील) मध्ये द्वयोर्घाती पद्धतीने 11, 11, 111, 1011 किंवा दशांश पद्धतीने 3, 3, 7, 11 या संख्या लिहिण्यात आलेल्या आहेत याचा अर्थ पुढील आदेश होतो:

तिसऱ्या आणि सातव्या स्मरण घटामध्ये असलेल्या संख्यांवर तिसऱ्या क्रमांकाची (गुणाकार) क्रिया करून प्राप्त झालेले उत्तर 11 क्रमांकाच्या घटामध्ये स्मरण करून (लिहून नोंद करून) ठेवणे.



आकृती 9

यापुढे आपण आकृती 9 प्रमाणे संकेताच्या स्वरूपात नव्हे तर सरळ दशांश पद्धतीने संख्या लिहू. उदाहरणार्थ, आकृती क्रमांक 9 मधील (खालील) आदेश खालील प्रकारे लिहिला जातो.

गुणाकार 3 7 11

गणकयंत्राच्या कार्यक्रमासंबंधीची दोन अत्यंत साधी, सोपी उदाहरणे घेऊ.

कार्यक्रम 1

1) बेरीज 4 5 4
2) गुणाकार 4 4 →
3) नियंत्रण प्राप्तकर्ता 1
4) 0
5) 1

पहिल्या पाच घटांमध्ये वरील संख्या किंवा माहिती नोंद करून ठेवण्यात आलेले गणकयंत्र कसे काम करते ते आता आपण पाहू.

आदेश क्रमांक 1: 4 थ्या आणि 5 व्या घटांमध्ये नोंदकरून ठेवण्यात आलेल्या संख्यांची बेरीज करून उत्तर 4 थ्या घटाकडे पाठविणे (या ठिकाणी यापूर्वी जे काही नोंद करून ठेवण्यात आले होते त्या जागी). अशा प्रकारे यंत्र 4 थ्या घटामध्ये $0 + 1 = 1$ ही संख्या लिहून ठेवते. पहिल्या आदेशाचे पालन केल्यानंतर 4 थ्या आणि 5 व्या घटांमध्ये पुढील संख्या असतील:

4) 1,
5) 1.

आदेश क्रमांक 2: 4 थ्या घटातील संख्येचा त्याच संख्येशी गुणाकार करणे (1^2, बाणाचा अर्थ तयार उत्तर हाती देणे).

आदेश क्रमांक 3: पहिल्या घटाच्या हाती नियंत्रण सोपविणे. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास नियंत्रण प्राप्तकर्त्याच्या सर्व आदेशांनुसार ओळीने अगदी पहिल्या सर्व क्रिया पुन्हा एकदा करणे. तर पुन्हा पहिला आदेश.

आदेश क्रमांक 1: चौथ्या आणि पाचव्या घटातील संख्यांची बेरीज करणे व उत्तराची पुन्हा चौथ्या घटामध्ये नोंद करून ठेवणे. परिणामी, चौथ्या घटामध्ये $1 + 1 = 2$ ही संख्या होईल:

4) 2,

5) 1.

आदेश क्रमांक 2: चौथ्या घटातील संख्येचा वर्ग करून प्राप्त झालेली संख्या म्हणजे 2^2 कार्डावर लिहिणे (बाणाच्या चिन्हाचा अर्थ उत्तर देणे).

आदेश क्रमांक 3: पहिल्या घटाच्या हाती नियंत्रण देणे (म्हणजेच पुन्हा पहिल्या आदेशापासून सुरुवात करणे):

आदेश क्रमांक 1: $2+2=4$ ही संख्या चौथ्या घटाकडे पाठविणे:

4) 3,

5) 1.

आदेश क्रमांक 2: 3^2 या संख्येच्या वर्गाची कार्डावर नोंद करणे.

आदेश क्रमांक 3: नियंत्रण पहिल्या घटाच्या हाती सोपविणे... इत्यादी.

आपणाला दिसून येईल की यंत्र एकापाठोपाठ एक याप्रमाणे संख्येचा वर्ग करून प्राप्त होणाऱ्या संख्येची कार्डावर नोंद करून ठेवत आहे. प्रत्येक वेळी नव्याने संख्येची नोंद करावी लागत नाही, यंत्र स्वतःच ही संख्या घेऊन त्याचा वर्ग करते. या कार्यक्रमानुसार कार्य करीत यंत्र सर्व पूर्ण संख्यांचे (उदा. 1 पासून 10 000 पर्यंत) काही सेकंदात (किंवा एक सेकंदाहूनही कमी वेळात) वर्ग करते.

या ठिकाणी एका गोष्टीचा उल्लेख करावा लागेल की प्रत्यक्षात पूर्ण संख्यांचा वर्ग मिळविण्यासाठी तयार करण्यात येणारा कार्यक्रम वर नमूद केलेल्या कार्यक्रमापेक्षा कितीतरी गुंतागुंतीचा असेल. सर्वप्रथम याचा संबंध येतो तो आदेश क्रमांक 2 शी. याचे कारण असे की एक क्रिया करावयास यंत्राला जितका वेळ लागतो त्याहून फार जास्त वेळ तयार उत्तराची कार्डावर नोंद करण्यास लागतो. म्हणून तयार उत्तरे प्रथम मोकळ्या "स्मरण"–घटांमध्ये स्मरण करून ठेवली जातात आणि त्यानंतर मग ("घाई-गर्दी न करता") कार्डावर त्यांची नोंद केली जाते. अशा रीतीने पहिले अंतिम उत्तर पहिल्या मोकळ्या "स्मरण"–घटामध्ये "स्मरण" करून ठेवले जायला हवे. अशाच प्रकारे दुसरे

उत्तर – दुसऱ्या मोकळ्या स्मरण घटात व तिसरे – तिसऱ्या मोकळ्या स्मरण घटात इत्यादी... अर्थात वर आपण पाहिलेले उदाहरण अत्यंत सोपे व साधे असल्याने त्यामध्ये ही गोष्ट लक्षात घेतली गेली नाही.

गणकयंत्र फार वेळ केवळ संख्याचा वर्गच करीत बसत नाही; कारण स्मरण करून ठेवण्यासाठी मोकळी घटे कमी पडतात, आणि आपणाला हवे तेवढे वर्ग करून घेऊन त्यानंतर यंत्र बंद करण्याची सोय नसते (कारण यंत्र एका सेकंदाच्या आत कित्येक हजार क्रिया पार पाडते!) म्हणून आवश्यक त्या क्षणाला यंत्र बंद होईल या दृष्टीने कार्यक्रम आयोजित केले जातात, खास आदेश दिले जातात. उदाहरणार्थ, कार्यक्रम अशा प्रकारे तयार केला जातो की 1 पासून 10 000 पर्यंतच्या पूर्ण संख्यांचे वर्ग केल्यानंतर यंत्र आपोआप बंद होईल.

इतरही काही गुंतागुंतीचे आदेश यंत्राला दिले जातात पण येथे आपण त्यावर चर्चा न करता फक्त साधे-सोपे कार्यक्रम विचारात घेऊ.

1 पासून 10 000 पर्यंतच्या पूर्ण संख्यांचे वर्ग करण्यासाठी तयार करण्यात आलेल्या कार्यक्रमाचे स्वरूप कसे असेल ते पहा:

कार्यक्रम 1a

1)	बेरीज	8	9	8
2)	गुणाकार	8	8	10
3)	बेरीज	2	6	2
4)	विशेषनियंत्रण प्राप्तकर्ता	8	7	1
5)	बंद			
6)		0	0	1
7)	10 000			
8)	0			
9)	0			
10)	0			
11)	0			
12)	0			

. . . .

या पूर्वीच्या कार्यक्रमाशी तुलना करता पहिल्या दोन आदेशांमध्ये फारसा फरक नाहीच. या दोन आदेशांची पूर्तता केल्यानंतर 8 व्या, 9 व्या आणि 10 व्या घटांमध्ये पुढील संख्या असतील:

8) 1

9) 1

10) 1^2

तिसरा आदेश मात्र अतिशय मनोरंजक आहे: दुसऱ्या आणि सहाव्या घटांमध्ये असलेल्या संख्यांची बेरीज करून उत्तरांची पुन्हा दुसऱ्या घटामध्ये नोंद करणे. यानंतर दुसऱ्या घटाचे स्वरूप असे असेल :

2) गुणाकार 8 8 11

एक गोष्ट आपल्या ध्यानात आली असेल की तिसऱ्या आदेशाची पूर्तता केल्यानंतर दुसऱ्या आदेशामध्ये बदल होतो, खरे पाहता दुसऱ्या आदेशांतर्गत असलेल्या एका प्राप्तकर्त्यामध्ये बदल होतो. याची आवश्यकता काय ते आता आपण पाहू.

आदेश क्रमांक 4: विशेष नियंत्रण संक्रमण (या पूर्वीच्या कार्यक्रमातील 3 ऱ्या आदेशाच्या स्थानी). त्या आदेशाची पूर्तता पुढील प्रकारे केली जाते: जर 8 व्या घटातील संख्या 7 व्या घटातील संख्येपेक्षा लहान असेल तर नियंत्रणाचे काम पहिल्या घटाकडे सोपविले जाते, जर याउलट स्थिती असेल तर पुढील (5 व्या) आदेशानुसार कृती केली जाते. आपल्या या कार्यक्रमात $1 < 10\,000$. त्यामुळे नियंत्रण 1 ल्या घटाकडे दिले जाते. अशा प्रकारे पुन्हा एकदा आदेश क्रमांक 1.

आदेश क्रमांक 1 च्या पूर्ततेनंतर 8 व्या घटामध्ये 2 ही संख्या असेल.

दुसऱ्या क्रमांकाच्या आदेशाचे स्वरूप आता असे असेल :

2) गुणाकार 8 8 11

याचा अर्थ 2^2 ही संख्या 11 व्या घटाकडे धाडली जाते. आता या गोष्टीचा उलघडा होतो की यापूर्वी तिसऱ्या आदेशाची पूर्तता का केली गेली: नवी संख्या, म्हणजे 2^2 10 व्या घटामध्ये जाता कामा नये कारण तो मोकळा नाही, तर ती पुढील म्हणजे 11 व्या घटात जावी. 1 ल्या आणि 2 ऱ्या आदेशानंतर आपणाकडे पुढील संख्या असतील

8) 2
9) 1
10) 1^2
11) 2^2

आदेश क्रमांक 3 च्या पूर्ततेनंतर 2 ऱ्या घटाचे स्वरूप असे होईल :

2) गुणाकार 8 8 12.

म्हणजेच नवे उत्तर पुढील 12 व्या घटात लिहिण्यासाठी यंत्र सज्ज झाले. 8 व्या घटामध्ये 7 व्या घटातील संख्येपेक्षा अद्यापी लहानच संख्या असल्यामुळे 1 ल्या घटाकडे नियंत्रण जावे असाच 4 थ्या आदेशाचा अर्थ होतो.

आता 1 ल्या आणि 2 ऱ्या आदेशांच्या पूर्ततेनंतर पुढील संख्या असतील :

8) 3
9) 1
10) 1^2
11) 2^2
12) 3^2

या कार्यक्रमानुसार यंत्र केव्हापर्यंत संख्यांचे वर्ग करीत जाईल? जोपर्यंत 8 व्या घटामध्ये 10 000 ही संख्या येत नाही तोपर्यंत म्हणजेच 1 पासून 10 000 पर्यंतच्या सर्व पूर्ण संख्यांचे वर्ग होत नाहीत तोपर्यंत. यानंतर मात्र 4 था घट 1 ल्या घटाकडे नियंत्रण सोपवित नाही (कारण आता 8 व्या घटामध्ये 7 व्या घटातील संख्येपेक्षा लहान नव्हे तर बरोबरीची संख्या येते), तर 4 थ्या आदेशानंतर यंत्र आदेश क्रमांक 5 नुसार कार्य करते म्हणजेच बंद होते.

आता एक अवघड उदाहरण घेऊ: समीकरणाचा संच सोडविणारा कार्यक्रम विचारात घेऊ. अर्थात, या ठिकाणीही आपण सुलभसा कार्यक्रम घेऊ.

असे समजू की पुढील समीकरणांचा संच देण्यात आला आहे :

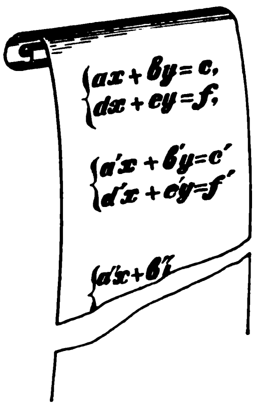
$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

हे समीकरण सोडविणे तितके अवघड नाही :

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}, \qquad y=\frac{af-cd}{ae-bd}.$$

अशा प्रकारची समीकरणे सोडविण्यास आपणाला काही सेकंद जरूर लागतील. गणकयंत्र सेकंदामध्ये अशा प्रकारची कित्येक हजार समीकरणे सोडविते.

एक कार्यक्रम विचारात घेऊ. असे समजू की असे अनेक समीकरणांचे संच एकाच वेळी सोडविण्यासाठी दिलेले आहेत :



आकृती 10

या गुणकांचे सांख्यिक मूल्य देण्यात आलेले आहे: a, b, c, d, e, f, a′, b′,... या कार्यक्रमाचे स्वरूप असे असेल : (पृष्ठ 91 पहा)

आदेश क्रमांक 1: 28 व्या आणि 30 व्या घटातील संख्यांचा गुणाकार करून उत्तर 20 व्या घटाकडे पाठविणे. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास, 20 व्या घटामध्ये ce ही संख्या लिहिली जाईल.

अशाच प्रकारे 2 पासून 6 पर्यंतच्या आदेशांची पूर्तता केली जाईल. परिणामी 20 ते 25 व्या घटांमध्ये पुढील संख्या येतील :

कार्यक्रम 2

1)	× 28	30	20
2)	× 27	31	21
3)	× 26	30	22
4)	× 27	29	23
5)	× 26	31	24
6)	× 28	29	25
7)	— 20	21	20
8)	— 22	23	21
9)	— 24	25	22
10)	: 20	21	→
11)	: 22	21	→
12)	+ 1	19	1
13)	+ 2	19	2

14)	+ 3	19	3
15)	+ 4	19	4
16)	+ 5	10	6
17)	+ 6	19	6
18)	नियंत्रण संक्रमण		1
19)	6		0
20)	0		
21)	0		
22)	0		
23)	0		
24)	0		
25)	0		

26) a
27) b
28) c
29) d
30) e
31) f
32) a′
33) b′
34) c′
35) d′
36) e′
37) f′
38) a″
. . .

20) ce

21) bf

22) ae

23) bd

24) af

25) cd

आदेश क्रमांक 7: 20 व्या घटामध्ये असलेल्या संख्येमधून 21 व्या घटामधील संख्या वजा करून उत्तराची (ce—bf) पुन्हा 20 व्या घटामध्ये नोंद करून ठेवणे.

याचप्रमाणे 8 व्या आणि 9 व्या आदेशांची पूर्तता केली जाते. परिणामी 20 व्या, 21 व्या आणि 22 व्या घटांमध्ये पुढील संख्या येतील :

20) ce—bf

21) ae—bd

22) af—cd

आदेश क्रमांक 10 आणि 11:

$$\frac{ce-bf}{ae-bd} \text{ आणि } \frac{af-cd}{ae=bd}$$

हा भागाकार करून उत्तराची नोंद कार्डावर केली जाते (म्हणजेच तयार स्वरूपात उत्तर दिले जाते). पहिल्या समीकरण संचामधून प्राप्त होणाऱ्या अज्ञात किंमती याच आहेत.

अशा प्रकारे पहिला संच सोडविण्यात आला. मग पुढील आदेशांची आवश्यकता काय? कार्यक्रमाचा पुढील भाग (12 ते 19 घट) यंत्राला दुसऱ्या समीकरण संचाच्या सोडवणुकीची "पूर्वतयारी" करण्यास भाग पाडण्यासाठी जरूरी आहे. हे कसे काय घडते ते आता आपण पाहू या. 10 पासून 17 क्रमांकाच्या आदेशांचा अर्थ असा की 1 ते 6 क्रमांकाच्या घटांमध्ये 19 व्या घटामधील नोंदणीची भर घातली जाते आणि उत्तरे पुन्हा 1 ते 6 क्रमांकाच्या घटांमध्ये ठेवली जातात. अशा

रीतीने 17 व्या आदेशाची पूर्तता केल्यानंतर पहिल्या सहा घटांचे स्वरूप असे दिसून येते :

1) ×34	36	20
2) ×33	37	21
3) ×32	36	22
4) ×33	35	23
5) ×32	37	24
6) ×34	35	25

आदेश क्रमांक 18: नियंत्रण पहिल्या घटाकडे सोपविणे. यापूर्वीच्या नोंदणी आणि पहिल्या सहा घटांमधील नव्या नोंदणी यांच्यामध्ये फरक काय? फरक ह्या आहे की या घटातील पहिले दोन स्थानक्रमांक पूर्वीप्रमाणे 26 ते 31 नसून 32 ते 37 आहेत. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे झाल्यास, गणकयंत्र पुन्हा याच क्रियांची पुनरावृत्ती करेल, परंतु यासाठी संख्या 26 ते 31 व्या घटांतून नव्हे तर 32 ते 37 व्या घटांमधून घेतल्या जातील. या ठिकाणी दुसऱ्या समीकरण संचांचे गुणक असतील. परिणामी यंत्र दुसऱ्या समीकरणांच्या संचाची सोडवणूक करेल. दुसऱ्या संचाच्या सोडवणुकीनंतर यंत्र तिसऱ्या संचाकडे आपला मोहरा वळवेल इत्यादी...

आपल्या या वरील विवेचनावरून स्पष्टपणे दिसून येत आहे की अचूक कार्यक्रम तयार करण्यास शिकणे किती महत्त्वाचे आहे. कारण यंत्रास स्वतःस काहीच "करता" येत नाही. ते फक्त आखून दिलेला कार्यक्रमच पूरा करू शकते.

या प्रकरणाचा समारोप करण्यापूर्वी एक गोष्ट सांगाविशी वाटते की, आता तथाकथित कार्यक्रमाची आखणी करणारे कार्यक्रम अस्तित्वात आले आहेत, ज्यांच्या साहाय्याने यंत्र एखादा प्रश्न सोडविण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या कार्यक्रमाची आखणी करू शकते. यामुळे कार्यक्रम तयार करण्याच्या किचकट कामापासून आपली मुक्तता जरूर होते.

प्रकरण 3

अंकगणिताच्या मदतीस

आपले स्वतःचे नियम सिद्ध करणे अनेकदा अंकगणितास फार कठीण जाते. यासाठी अंकगणिताला बीजगणिताकडे धाव घेणे भाग पडते. बीजगणिताच्या पायावर आधारीत अंकगणिती संस्कारांमध्ये संक्षिप्त प्रक्रियांसंबंधीच्या नियमांचा, काही संख्यांच्या मनोरंजक गुण-धर्मांचा, भागाकारांच्या वैशिष्ट्यांचा व इतर गोष्टींचा समावेश आहे. अशा प्रकारच्या काही गोष्टींवर आपण या प्रकरणामध्ये चर्चा करू.

एका क्षणात गुणाकार

बीजगणिताची मदत घेऊन गणकयंत्रज्ञ अनेकदा आपले काम सोपे करतात. उदाहरणार्थ 988 या संख्येचा वर्ग अशा प्रकारे केला जातो:

$$988 \times 988 = (988 + 12) \times (988 - 12) + 12^2 =$$
$$= 1000 \times 976 + 144 = 976\,144.$$

आपल्या ध्यानात आले असेलच की गणकयंत्रज्ञाने या ठिकाणी बीजगणितातील पुढील सुत्राची मदत घेतली आहे:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2$$

तोंडी हिशेब करण्यासाठीदेखील आपण या सुत्राचा यशस्वीरित्या उपयोग करू शकतो.

उदाहरणार्थ:

$$27^2 = (27 + 3) \times (27 - 3) + 3^2 = 729,$$
$$63^2 = 66 \times 60 + 3^2 = 3\,969,$$

$$18^2=20\times16+2^2=\ \ 324,$$
$$37^2=40\times34+3^2=1\,369,$$
$$48^2=50\times46+2^2=2\,304,$$
$$54^2=58\times50+4^2=2\,916.$$

पुढे 986×997 हा गुणाकार अशा प्रकारे केला जातो :

$$986\times997=(986-3)\times1\,000+3\times14=983\,042.$$

ही पद्धत कशावर आधारीत आहे? गुणाकारातील संख्या पुढील प्रकारे मांडू

$$(1\,000-14)\times(1\,000-3)$$

आणि बीजगणिताच्या नियमांनुसार या दोन राशींचा गुणाकार करू :

$$1\,000\times1\,000-1\,000\times14-1\,000\times3+14\times3.$$

म्हणजेच

$$1\,000(1\,000-14)-1\,000\times3+14\times3=$$
$$=1\,000\times986-1\,000\times3+14\times3=1\,000\,(986-3)+14\times3.$$

गणकयंत्रज्ञाने वापरलेल्या पद्धतीने प्राप्त होणारी राशी आणि वरील पद्धतीनुसार प्राप्त होणारी राशी (शेवटची) समान असल्याचे आपल्या ध्यानात आले असेलच.

दशकाच्या स्थानावरील अंक समान असलेल्या आणि एककाच्या स्थानावरील अंकांची बेरीज 10 असलेल्या दोन तीन अंकी संख्यांचा गुणाकार करण्याची पद्धत मनोरंजक आहे. हा गुणाकार पुढीलप्रकारे केला जातो : उदाहरणार्थ : 783×787

$$78\times79=6\,162;\quad 3\times7=21,$$

उत्तर : 616221.

ही पद्धत साधार आहे हे आपणाला पुढील उदाहरणावरून दिसून येईल :

$$(780+3)(780+7)=780\times780+780\times3+780\times7+3\times7=$$
$$=780\times780+780\times10+3\times7=780(780+10)+3\times7=$$
$$=780\times790+21=616\,200+21.$$

अशा प्रकारचा गुणाकार करण्याची दुसरी एक पद्धत याहूनही सोपी आहे :

$$783\times787=(785-2)\,(785+2)=785^2-4=$$
$$=616\,225-4=616\,221.$$

वरील उदाहरणामध्ये आपणाला 785 या संख्येचा वर्ग करावा लागतो.

5 या अंकाने शेवट होणाऱ्या संख्येचा वर्ग करण्याची एक अत्यंत सोयीस्कर पद्धत अशी आहे :

35^2;	$3\times4=12.$	उत्तर 1 225.
65^2;	$6\times7=42.$	उत्तर 4 225.
75^2;	$7\times8=56.$	उत्तर 5 625.

नियम असा आहे की दशकाच्या स्थानावरील अंकाचा गुणाकार त्याहून एकने जास्त असलेल्या अंकाशी केला जातो आणि प्राप्त होणाऱ्या संख्येपुढे 25 लिहिले जातात. मूळ तत्त्व हे की जर दशकाच्या स्थानावरील अंक समजा a असेल तर संपूर्ण संख्या अशी असेल :

$$10a+5.$$

या संख्येचा वर्ग नियमानुसार असा होईल :

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

$a(a+1)$ ही राशी म्हणजेच वर उल्लेख केल्याप्रमाणे दशकाच्या स्थानावरील अंकाचा त्याहून एकने जास्त असलेल्या अंकाशी गुणाकार. प्राप्त होणाऱ्या संख्येला 100 ने गुणून त्यात 25 मिळविणे काय किंवा या संख्येपुढे 25 लिहिणे काय दोन्ही गोष्टी एकच.

याच पद्धतीच्या आधारावर आपणास अपूर्णांकी संख्येचा वर्ग करण्याची सोपी पद्धत प्राप्त होते. उदाहरणार्थ :

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3.5^2 = 12.25 = 12\frac{1}{4},$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}, \quad \left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}.$$

अंक 1, 5 आणि 6

1 आणि 5 ने शेवट होणाऱ्या संख्यांच्या गुणाकार वृद्धीमुळे प्राप्त होणाऱ्या संख्येचा शेवटसुद्धा अनुक्रमे 1 आणि 5 मध्ये होतो ही गोष्ट आपल्या लक्षात आली असेलच परंतु हीच परिस्थिती 6 या अंकाच्या बाबतीत देखील आहे याची कदाचित आपणास कल्पना नसेल. 6 ने शेवट होणाऱ्या कोणत्याही संख्येचा कोणताही घात घेतल्यास प्राप्त होणाऱ्या संख्येचा शेवट 6 ने झाल्याचे आपणास आढळून येईल. उदाहरणार्थ :

$$46^2 = 2\,116; \quad 46^3 = 97\,336.$$

1, 5 आणि 6 या अंकांच्या या मनोरंजक गुणधर्माला बीजगणिताचा आधार आहे. 6 हा अंक आता विचारात घेऊ.

6 ने शेवट होणाऱ्या संख्या पुढील प्रकारे व्यक्त करता येतील :

$$10a+6, \ 10b+6 \quad \text{इत्यादी},$$

जेथे a आणि b हे पूर्णांक आहेत.

अशा प्रकारच्या दोन संख्यांचा गुणाकार पुढील प्रकारे होईल :

$$100ab+60b+60a+36=10(10ab+6b+6a)+30+6=$$
$$=10(10ab+6b+6a+3)+6.$$

यावरून दिसून येईल की गुणाकार व बेरीज ही शेवटी काही दशकांची आणि 6 या अंकांची आहे म्हणजे प्राप्त होणाऱ्या संख्येचा शेवट 6 ने होईल यात शंकाच नाही.

हीच गोष्ट 1 आणि 5 या अंकांच्या बाबतीत आहे.

वरील सर्व गोष्टींच्या आधारे आपणाला असे म्हणता येईल की 386^{2567} च्या शेवटी प्राप्त होणारी संख्या 6 ने संपेल, 815^{723} च्या शेवटी प्राप्त होणारी संख्या 5 ने संपेल, 491^{1732} च्या शेवटी प्राप्त होणारी संख्या 1 ने संपेल.

25 आणि 76

1, 5 आणि 6 प्रमाणेच वैशिष्टच असलेल्या दोन अंकी संख्यादेखील आहेत. या संख्या म्हणजे 25 आणि 76 होत. 76 ने समाप्त होणाऱ्या कोणत्याही दोन संख्यांचा गुणाकार केला असता प्राप्त होणाऱ्या संख्येचा शेवटदेखील 76 नेच होतो.

आपले हे वरील विधान आता सिद्ध करू. संबंधित संख्यांचे एकंदगीत स्वरूप हे असे असेल :

$$100a+76, \quad 100b+76 \quad \text{इ.}$$

अशा प्रकारच्या या दोन संख्यांचा आता गुणाकार करू;

$$10\,000ab+7\,600b+7\,600a+5\,776=$$
$$=10000ab+7\,600b+7\,600a+5\,700+76=$$
$$=100\,(100ab+76b+76a+57)+76.$$

यावरून असे सिद्ध होते की प्राप्त होणाऱ्या संख्येचा शेवट 76 ने होतो.

म्हणजे 76 या संख्येचा कोणताही घात घेतला असता उत्तराच्या शेवटी 76 ही संख्या असेल :

$$376^2=141\,376,$$
$$576^3=191\,102\,976 \quad \text{इ.}$$

अमर्याद संख्या

असे अनेक अंक आहेत जे एखाद्या संख्येच्या शेवटी आले असता त्या संख्येच्या आपसात होणाऱ्या गुणाकारानंतर जी संख्या मिळते त्याच्या शेवटी येतात. अशा अंकांचे गट अमर्याद आहेत.

अशा प्रकारचा गुणधर्म असलेल्या दोन अंकी संख्याचे गट आपणास ठाऊक आहेत. ते म्हणजे 25 आणि 76. या गुणधर्माच्या तीन अंकी संख्या जाणण्यासाठी एका ठराविक अंकाच्या पुढे 25 किंवा 76 लिहिले की पुरे, आपणाला या प्रकारची तीन अंकी संख्या मिळेल.

कोणत्या अंकापुढे 76 ही संख्या लिहावयाची? असे समजू की हा अंक k आहे. तेव्हा यामुळे तीन अंकी संख्येचे स्वरूप असे असेल:

$$100k+76.$$

या गटात मोडणाऱ्या संख्यांचे एकंदरीत स्वरूप असेल:

$$1\,000a+100k+76,$$
$$1\,000b+100k+76 \quad \text{इ.}$$

अशा प्रकारच्या दोन संख्यांचा गुणाकार केला असता:

$$1\,000\,000ab+100\,000ak+1\,00\,000bk+76\,000a+$$
$$+76\,000b+10\,000k^2+15\,200k+5\,776.$$

या सर्व वेगवेगळ्या संख्यांमध्ये शेवटच्या दोन संख्या वगळता शेवटी कमीत कमी तीन शून्य येतात. म्हणून, जर

$$15\,200k+5\,776-(100k+76)=15\,100k+5\,700=$$
$$=15\,000k+5\,000+100\,(k+7)$$

या फरकास 1 000 ने भाग दिल्यास गुणाकाराअंती प्राप्त होणाऱ्या संख्येच्या शेवटी 100k + 76 असेल. स्पष्टच आहे की फक्त k=3 असेल तरच हे शक्य होईल.

यावरून हे सिद्ध होते की मूळ अंक 376 असेल. म्हणूनच 376

या संख्येचा कोणताही घात घेतला असता प्राप्त होणाऱ्या संख्येच्या शेवटी 376 हा अंक असेल. उदाहरणार्थ :

$$376^2 = 141\,376.$$

आता जर आपणास हाच गुणधर्म असलेली चार अंकी संख्या शोधून काढावयाची असेल तर 376 या संख्येमागे आणखी एक अंक लिहावा लागेल. हा अंक l आहे असे समजल्यास आपल्या समोरील प्रश्न असेल :

$$(10\,000b+1\,000l+376) \quad (10\,000a+1\,000l+376)$$

या गुणाकाराच्या उत्तरादाखल प्राप्त होणाऱ्या संख्येच्या शेवटी $1\,000l + 376$ येण्यासाठी l ची किंमत काय असावी? कंस सोडवून चार आणि चारहून जास्त शून्य असलेल्या संख्या सोडल्यास पुढील दोन राशी शिल्लक राहतील

$$752\,000l+141\,376.$$

$$752\,000l+141\,376-(1\,000l+376)=751\,000l+141\,000=$$
$$=(750\,000l+140\,000)+1\,000(l+1)$$

या फरकास 10 000 ने भाग गेल्यास वरील गुणाकाराच्या शेवटी $1\,000l + 376$ येईल. अर्थातच ($l=9$) म्हणजेच l ची किंमत 9 असेल तरच हे शक्य होईल.

चार अंकी संख्येचा वरील गुणधर्म असलेला हा गट 9 376 या संख्येचा आहे.

अगदी वरील प्रमाणेच आपणाला 09376, 109 376 व त्यानंतर 7 109 376 इत्यादी अनुक्रमे पाचअंकी, सहाअंकी, सात अंकी इत्यादी संख्यागट प्राप्त करता येतील. डाव्या बाजूने अंक लिहून प्राप्त केल्या जाणाऱ्या वरील प्रकारच्या संख्या अमर्याद आहेत.

सर्वात मनोरंजक वस्तुस्थिती ही आहे की वर नमूद करण्यात आलेली (. . . 7 109 376) अमर्याद "संख्या", आपला विश्वास बसणार नाही, पण खालील समीकरण सिद्ध करून दाखविते :

$$x^2 = x.$$

खरोखरच या "संख्ये"चा वर्ग केला असता प्राप्त होणाऱ्या संख्येच्या शेवटी 76 असेल. या गटातील संख्यांचा आपआपसात गुणाकार केला असता शेवटी 76 येत असल्यामुळे या संख्येच्या वर्गाच्या शेवटी 376, 9 376 इत्यादी अंक येतात. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास x^2 ही संख्या पाहता (जेथे $x = \ldots 7\,109\,376$) आपणाला असे आढळून येईल की या संख्येतदेखील x या संख्येप्रमाणेच तेच अंक आहेत म्हणजेच $x^2 = x$.

वर आपण 76 ने शेवट होणाऱ्या संख्यांच्या गटाचा विचार केला. याच पद्धतीने 5 या अंकाने शेवट होणाऱ्या संख्यांचा विचार केला असता आपणाला खालील संख्यागट प्राप्त होतील :

5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625 इत्यादी.

परिणामी आपणाला आणखी एक अमर्याद "संख्या" प्राप्त होते :

$$\ldots 2890625,$$

ही "संख्या"देखील $x^2 = x$ हे समीकरण सिद्ध करून दाखविते. या अमर्याद "संख्ये"चे स्वरूप खालील प्रमाणे दाखविता येईल :

$$\left(\left((5^2)^2\right)^2\right)^{2\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$$

प्राप्त होणारे उत्तर अमर्याद "संख्यां"च्या भाषेमध्ये अशा प्रकारे व्यक्त करता येईल : $x^2 = x$ या समीकरणाची दोन "अमर्याद" उत्तरे आहेत ($x = 0$ आणि $x = 1$ याव्यतिरिक्त) :

$$x = \ldots 7\,109\,376 \quad \text{आणि}$$
$$x = \ldots 2\,890\,725.$$

एक कोडे

एक प्राचीन कोडे :

फार फार वर्षांपूर्वी घडलेली ही एक घटना आहे. गुरांच्या दोन व्यापाऱ्यांनी आपल्या जवळील बैलांचा एक कळप विकून टाकला.

कळपामध्ये जितके बैल होते तितके रूबल त्यांना प्रत्येक बैलामागे मिळाले. मिळालेल्या पैशातून त्यांनी दहा रूबलला एक मेंढरू आणि एक कोकरू या हिशोबाने मेंढऱ्या खरेदी केल्या. समान वाटणी केल्या-नंतर एकाला एक मेंढरू जादा मिळाले तर दुसऱ्याने आपल्या या साथीदाराकडून कोकरू व जादा पैसे (नुकसान भरपाई) घेतले. त्याने किती जादा रूबल (पूर्ण संख्या) घेतले असावेत?

उत्तर :

कोड्याचे भाषांतर सरळ सरळ बीजगणिताच्या भाषेत करून समी-करण मांडता येत नाही. हे कोडे दुसऱ्या मार्गाने अंकगणिताच्या साहाय्याने सोडवावे लागेल. पण येथे सुद्धा बीजगणित अंकगणिताच्या मदतीस धावून येते.

बैलांच्या संपूर्ण कळपाची किंमत म्हणजे कळपातील एकूण बैलांच्या संख्येचा वर्ग कारण प्रत्येकी n रूबल या दराने एकूण n बैल विकले गेले आहेत. एका व्यापाऱ्याला एक मेंढरू जादा मिळाले म्हणजेच मेंढ-रांची संख्या विषम होती, याचाच अर्थ असा की n^2 या संख्येतील दशकांची संख्या विषम आहे. मग एककाच्या स्थानावरील अंक कोणता असावा?

आपणाला हे सिद्ध करता येईल की, जर वर्गामधील दशकाच्या स्थानावरील संख्या विषम असेल तर त्यामधील एककाच्या स्थानावरील अंक फक्त 6 च असू शकेल.

खरे पाहता a दशक आणि b एकक असलेल्या म्हणजेच $(10a + b)^2$ अशा स्वरूपाच्या संख्येचा वर्ग असेल :

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\times 10+b^2.$$

या संख्येतील दशकाच्या स्थानावरील अंक असेल $10a^2 + 2ab$, शिवाय b^2 या संख्येत देखील दशकाचा अंक आहेच. परंतु $10a^2 + 2ab$ ला 2 ने भाग जातो म्हणजेच ही संख्या सम आहे. म्हणून जर b^2 या संख्येतील दशकाच्या स्थानावरील अंक विषम असेल तरच $(10a + b)$ या संख्येतील दशकाच्या स्थानावरील अंक विषम असेल. b^2 काय आहे

ही गोष्ट आपल्या ध्यानात असेलच. हा आहे एककाच्या स्थानावरील अंकाचा वर्ग म्हणजेच खालील 10 पैकी एखादी संख्या :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

यापैकी फक्त 16 आणि 36 या संख्यांमध्येच दशकाच्या स्थानावरील अंक विषम आहेत आणि दोन्ही संख्यांच्या शेवटी 6 आहे. याचा अर्थ असा की

$$100a^2+20ab+b^2$$

या वर्गामध्ये जर ही संख्या 6 ने समाप्त होत असेल तरच दशकाच्या स्थानावरील अंक विषम असू शकेल.

आता हे कोडे सोडविणे फारच सोपे आहे. स्पष्ट आहे की कोकरूची किंमत 6 रूबल पडली. ज्या व्यापाऱ्याला हे कोकरू मिळाले त्याला आपल्या साथीदारापेक्षा 4 रूबल कमी मिळाले असाच याचा अर्थ होतो. म्हणून समान वाटणी व्हावी यासाठी कोकरू मिळालेल्या व्यापाऱ्याने आपल्या साथीदाराकडून 2 रूबल घ्यावयास हवेत.

11 ची विभाज्यता

एखाद्या संख्येला कोणत्या संख्येने भाग जाईल याची पूर्वकल्पना बीजगणिताच्या मदतीने होते. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 या संख्यांचे विभाज्यता गुणधर्म सर्वांना ठाऊक आहेत. 11 या संख्येचा विभाज्यता गुणधर्म साधा-सोपा आणि बराच व्यावहारिक स्वरूपाचा आहे.

असे समजू की N या बहुअंकी संख्येच्या एककाच्या स्थानावरील अंक आहे a, तर दशकाच्या स्थानावरील b, शतकाच्या स्थानावरील c, सहस्राच्या स्थानावरील d, इत्यादी, म्हणजेच

$$N=a+10b+100c+1\,000d+\ldots=a+10(b+10c+100d+\ldots).$$

N या संख्येतून $11(b+10c+100d+\ldots)$ ही (अकराची एखादी पट) संख्या वजा करू म्हणजे अंती प्राप्त होणारी संख्या असेल

$$a - b - 10(c + 10d + \ldots).$$

आपल्या ध्यानात आले असेलच की या फरकास 11 ने भाग दिल्यास बाकी राहिलेली संख्या N ला 11 ने भाग दिल्यास बाकी राहणाऱ्या संख्येइतकीच असते. या फरकामध्ये $11(c + 10d + \ldots)$ मिळविले असता पुढील संख्या प्राप्त होते :

$$a - b + c + 10(d + \ldots).$$

या संख्येस देखील 11 ने भाग दिला असता बाकी राहिलेली संख्या N संख्येस 11 ने भाग दिला असता बाकी राहणाऱ्या संख्येइतकी असते. या संख्येमधून $11(d + \ldots)$ (अकराची पट) ही संख्या वजा केली असता आपणाला

$$a - b + c - d + \ldots = (a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$$

ही संख्या प्राप्त होते व या संख्येस देखील 11 ने भाग दिल्यास बाकी राहणारी संख्या N संख्येस 11 ने भाग दिला असता बाकी राहणाऱ्या संख्येइतकीच असते.

वरील विवेचनावरून 11 संख्येच्या विभाज्यतेचा एक गुणधर्म उघड होतो : विषम स्थानी असलेल्या अंकांच्या एकूण बेरजेमधून सम स्थानी असलेल्या अंकाची एकूण बेरीज वजा केली असता प्राप्त होणारी संख्या जर 0 किंवा अकराच्या पटीत असेल तर मूळ संख्या देखील 11 ची पट असेल, याउलट स्थितीत मूळ संख्येस 11 ने भाग जात नाही.

उदाहरणार्थ 87 635 064 ही संख्या विचारात घेऊ :

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25,$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14,$$
$$25 - 14 = 11.$$

याचा अर्थ या संख्येस 11 ने पूर्ण भाग जाईल.

11 या संख्येच्या विभाज्यतेचा आणखी एक गुणधर्म आहे. पण संख्या जर फारच लांबलचक असेल तर हा गुणधर्म सोयीस्कर ठरत नाही. उजवीकडून डावीकडे प्रत्येकी दोन अंक याप्रमाणे या संख्येचे विभाजन करून या भागांची बेरीज केली जाते. प्राप्त होणाऱ्या संख्येला

जर 11 ने पूर्णपणे भाग जात असेल तर ही संख्या 11 ची पट असेल व जर पूर्णपणे भाग जात नसेल तर मूळ संख्येला सुद्धा 11 ने पूर्ण भाग जाणार नाही. उदाहरणार्थ 528 ही संख्या विचारात घेऊ. या संख्येचे नियमानुसार विभाजन करू (5/28) आणि दोन्ही भागांची बेरीज करू:

$$5+28=33.$$

33 या संख्येस 11 ने पूर्ण भाग जातो म्हणून 528 ही संख्या 11 ची पट आहे म्हणजेच या संख्येस 11 ने पूर्ण भाग जातो:

$$528 \div 11 = 48.$$

वरील नियम सिद्ध करू. N या बहुअंकी संख्येचे विभाजन करू. म्हणजे आपणाला दोन अंकी (किंवा एक अंकी*) संख्या मिळतील, या संख्या a, b, c, इत्यादी आहेत असे समजल्यास N ही संख्या पुढील प्रकारे लिहिता येईल.

$$N = a+100b+10\,000c+\ldots = a+100\,(b+100c+\ldots).$$

आता N या संख्येमधून $99\,(b+100c\ldots)$ ही 11 ची पट असलेली संख्या वजा करू. प्राप्त होणाऱ्या

$$a+(b+100c+\ldots) = a+b+100\,(c+\ldots)$$

या संख्येस 11 ने भाग दिल्यास N या संख्येस 11 ने भाग दिला असता जितकी बाकी राहील तितकीच बाकी राहील. या संख्येमधून 11 ची पट असलेली $99(c+\ldots)$ ही संख्या वजा केली असता असे आढळून येईल की N व $a+b+c+\ldots$ या संख्येस 11 ने भाग दिला असता शिल्लक सारखीच राहील.

---

* जर N या संख्येतील अंकांची संख्या विषम असेल तर शेवटचा (अगदी डावीकडील) भाग एक अंकी असेल. शिवाय 03 अशा प्रकारचा भाग 3, म्हणजे एकअंकी संख्या आहे असे समजले जाते.

मोटारगाडीचा नंबर

शहरातून फेरफटका मारत असलेल्या गणित विषयाच्या तीन विद्यार्थ्यांना असे दिसून आले की एका गाडीच्या चालकाने रहदारीच्या नियमांचा गंभीररित्या भंग केलेला आहे. या गाडीचा चारअंकी नंबर कोणाच्याही लक्षात राहिला नाही परंतु हे गणिताचे विद्यार्थी असल्यामुळे प्रत्येकाने या चारअंकी संख्येचे कोणतेतरी वैशिष्टच ध्यानात ठेवले. एकाच्या लक्षात होते की या संख्येचे पहिले दोन अंक सारखेच होते. दुसऱ्याच्या लक्षात होते की शेवटचे दोन अंकदेखील एकसारखेच होते. ही चारअंकी संख्या कोणत्यातरी संख्येचा पूर्ण वर्ग आहे ही गोष्ट तिसऱ्या विद्यार्थ्याच्या नजरेतून सुटलेली नव्हती, एवढी सर्व माहिती उपलब्ध असल्यास या गाडीचा नंबर काय होता ते शोधून काढता येईल काय?

उत्तर:

मूळ संख्येतील (नंबरातील) पहिला (आणि दुसरा) अंक a आहे आणि तिसरा (आणि चौथा) अंक b आहे असे समजू. म्हणजेच या संख्येचे स्वरूप असे असेल:

$$1\,000a+100a+10b+b = 1\,100a+11b+11(100a+b).$$

या संख्येस 11 ने पूर्ण भाग जातो म्हणून (एक पूर्ण वर्ग असल्यामुळे) तिला 11^2 ने देखील पूर्ण भाग जातो. दुसऱ्या शब्दात सांगायवाचे झाल्यास $100a+b$ या संख्येस 11 ने भाग जातो. 11 च्या विभाज्यतेसंबंधीत वरील दोन्ही गुणधर्मापैकी कोणत्याही एकाच्या मदतीने आपणाला हे दिसून येईल की $a+b$ या संख्येस 11 ने भाग जातो. परंतु याचा अर्थ असा की

$$a+b=11,$$

कारण a व b पैकी प्रत्येक् अंक 10 पेक्षा लहान आहे.

पूर्ण वर्ग असलेल्या संख्येतील b हा शेवटचा अंक फक्त खालीलपैकी एकच असू शकेल:

$$0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9.$$

म्हणून 11b इतकी किंमत असलेला a हा अंक खालील पैकी एक असू शकतो :

$$11,\ 10,\ 7,\ 6,\ 5,\ 2.$$

वरीलपैकी पहिले दोन अंक सोडून देता पुढील शक्यता आपणासमोर असतील :

$$b=4, \qquad a=7;$$
$$b=5, \qquad a=6;$$
$$b=6, \qquad a=5;$$
$$b=9, \qquad a=2.$$

आपल्या वरील संपूर्ण विवेचनावरून असे दिसून येते की गाडीचा नंबर खालील चार संख्यांपैकी एक होता :

$$7\,744, \quad 6\,655, \quad 5\,566, \quad 2\,299.$$

परंतु यापैकी शेवटच्या तीन संख्या कोणत्याही संख्यांचे वर्ग नाहीत : 6655 या संख्येस 5 ने भाग जातो, पण 25 ने जात नाही ; 5566 या संख्येस 2 ने भाग जातो, पण 4 ने जात नाही ; $2299=121\times19$ ही संख्यादेखील वर्ग नाही. शेवटी एकच संख्या शिल्लक राहते – $7744=$ $=88^2$ हाच तो गाडीचा नंबर आहे.

19 ची विभाज्यता

19 च्या विभाज्यतेचा पुढील गुणधर्म कोणत्या पायावर आधारीत आहे ते पाहू या.

जर संख्येतील दशकाच्या स्थानावरील संख्येमध्ये एककाच्या स्थानावरील संख्येची दुप्पट मिळविली असता मिळणारी संख्या 19 ची पट असेल तर आणि तरच या संख्येस 19 ने पूर्ण भाग जातो.

कसे ते पाहू :

कोणत्याही N या संख्येचे स्वरूप असे असेल :

$$N=10x+y,$$

जेथे x = दशकाच्या स्थानावरील अंक (दशकाच्या स्वरूपातील अंक नव्हे तर संपूर्ण अंकातील पूर्ण दशकांची एकंदरीत संख्या) आणि y = एककाच्या स्थानावरील अंक. आपणाला या ठिकाणी हे दाखवायचे आहे की जर

$$N^1 = x + 2y$$

ही संख्या 19 ची पट असेल तर आणि तरच ती N 19 ची पट असू शकते. यासाठी N^1 ला 10 ने गुणू व प्राप्त होणाऱ्या संख्येतून N वजा करू :

$$10N^1 - N = 10(x+2y) - (10x+y) = 19y.$$

यावरून हे दिसून येते की जर N^1 ही 19 ची पट असेल तर $N = 10N^1 - 19y$ ला 19 ने पूर्ण भाग जातो व उलट जर N ला 19 ने पूर्ण भाग जात असेल तर

$$10N^1 + 19y$$

ही 19 ची पट आहे. जर असे असेल तर N' ला सुद्धा 19 ने पूर्ण भाग जाईल.

उदाहरणादाखल 47045881 या संख्येस 19 ने पूर्ण भाग जातो काय ते पाहू या.

आपल्या वरील पद्धतीची यासाठी मदत घेऊ :

$$\begin{array}{r}
4704588|1 \\
+2 \\
\hline
47045|90 \\
+18 \\
\hline
4706|3 \\
+6 \\
\hline
471|2 \\
+4 \\
\hline
47|5 \\
+10 \\
\hline
5|7 \\
+14 \\
\hline
19.
\end{array}$$

ज्या अर्थी 19 ला 19 ने पूर्ण भाग जातो त्या अर्थी 57, 475, 4712, 47063, 470459, 4704590, 47045881 या संख्यांनासुद्धा 19 ने पूर्ण भाग जातो. म्हणजेच आपल्या वरील संख्येस 19 ने पूर्ण भाग जाईल.

सोफिया झेरमनचा सिद्धांत

विख्यात फ्रेंच गणितज्ञ सोफिया झेरमनने घातलेले एक कोडे पाहू या :

a^4+4 या प्रकारची कोणतीही संख्या विभाज्य असते (जर $a \neq 1$) हे सिद्ध करा.

उत्तर :

$$a^4+4 = a^4+4a^2+4-4a^2 = (a^2+2)^2-4a^2 =$$
$$= (a^2+2)^2-(2a)^2 = (a^2+2-2a)(a^2+2+2a).$$

पुढील समीकरणाच्या आधारे आपणाला हे सिद्ध करता येईल :

आपण वर पाहिल्याप्रमाणे a^4+4 ही संख्या दोन अंकांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात व्यक्त करता येईल. हे दोन्ही अंक या खुद्द संख्येच्या किंवा तिच्या एककाच्या समान नाही; दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास ही संख्या विभाज्य आहे.

विभाज्य संख्या

ज्यांना भाग दिल्यानंतर एक आणि तेवढीच (मूळ संख्येइतकीच) संख्या शिल्लक राहते अशा तथाकथित सर्व सामान्य पूर्ण संख्याची संख्या प्रचंड व अमर्याद आहे.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... अशी सुरुवात केल्यास ही यादी अमर्याद ठरेल. विभाज्य संख्यांच्या दरम्यानची जागा

व्याप्त करून या संख्या संख्याच्या मूळ नैसर्गिक मालिकेचे छोटे मोठे तुकडे तुकडे पाडतात. हे तुकडे किती "लांबी"चे असू शकतात? नैसर्गिक मालिकेमध्ये कोणत्याही सर्वसामान्य संख्येने खंड न पडलेला हजारो अखंड विभाज्य संख्येचा तुकडा असू शकेल काय?

विभाज्य संख्येचे तुकडे कोणत्याही लांबीचे असू शकतात हे दाखविणे शक्य आहे. असे हे तुकडे हजारो, लाखो, कोटचवधी विभाज्य संख्यांचे असू शकतील.

सोयीसाठी 1 पासून n पर्यंतच्या सर्व संख्येचा गुणाकार n! आहे असे समजू. उदाहरणार्थ $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$. आता आपण असे सिद्ध करू की

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4], \ldots \text{ पासून } [(n+1)!+n+1] \text{ पर्यंतच्या}$$

मालिकेमध्ये n विभाज्य संख्या क्रमाने आहेत.

या संख्या एका पाठोपाठ एक याप्रमाणे नैसर्गिक क्रमाने येतात कारण पुढील प्रत्येक संख्या मागच्या संख्येपेक्षा 1 ने मोठी असते. या सर्व संख्या विभाज्य आहेत हे दाखविणेच काय ते शिल्लक आहे.

$$(n+2)!+2=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(n+1)+2$$

ही पहिली संख्या सम आहे कारण त्याच्या दोन्ही राशींमध्ये 2 हा गुणक आहे. आणि दोनपेक्षा मोठी असलेली कोणतीही सम संख्या विभाज्य असते.

$$(n+1)!+3=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+3$$

ही दुसरी संख्या दोन राशींची मिळून बनलेली असून त्यापैकी प्रत्येक राशी ही 3 ची पट आहे याचा अर्थ ही संख्यादेखील विभाज्य आहे.

$$(n+1)!+4=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+4$$

या तिसऱ्या संख्येला 4 ने पूर्ण भाग जातो कारण त्यामध्ये समाविष्ट असलेल्या राशी चारच्या पटीत आहेत.

अशाच प्रकारे आपणाला दाखवून देता येते की

$$(n+1)!+5$$

ही संख्या पाचची पट आहे इ. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास, आपल्या यावरील संख्यांमध्ये एकक आणि खुद्द संख्येपेक्षा वेगळा असा एक गुणक आहे आणि यामुळे या संख्या विभाज्य आहेत.

एका ओळीने जर आपणास पाच विभाज्य संख्या लिहावयाच्या असतील तर वरील संख्यांमध्ये n च्या जागी 5 हा अंक लिहिणे पुरेसे आहे. आपणाला पुढील पाच संख्या मिळतील

722, 723, 724, 725, 726.

एका ओळीत पाच विभाज्य संख्या फक्त याच नाहीत. इतरही काही आहेत जसे,

62, 63, 64, 65, 66.

किंवा याहीपेक्षा छोटचा संख्या :

24, 25, 26, 27, 28.

आता आपण एका ओळीत असलेल्या 10 विभाज्य संख्या लिहिता येतील काय ते पाहू.

या पूर्वीच्या आपल्या विवेचनाच्या आधारावर आपण या दहा संख्यापैकी पहिली संख्या पुढील घेऊ शकतो :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

म्हणून सलग दहा विभाज्य संख्यांची मालिका पुढीलप्रमाणे असू शकेल

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804,

इत्यादी.

तथापि दहा विभाज्य संख्यांच्या छोटचा छोटचा संख्या असलेल्या आणखीही मालिका आहेत. अशाच प्रकारची तीनअंकी विभाज्य संख्यांची दहा नव्हे तर तेरा संख्या असलेली एक मालिका पुढील प्रकारची आहे.

114, 115, 116, 117 इत्यादी 126 पर्यंत.

अविभाज्य संख्यांची संख्या

विभाज्य संख्यांच्या लांबलचक मालिका पाहून मनात खरोखरच शंका उत्पन्न होते की अविभाज्य संख्यांच्या मालिकेला अंत खरोखरच नाही की काय? म्हणूनच अविभाज्य संख्यांचा अमर्यादितपणा सिद्ध करून दाखविणे योग्य ठरेल. प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ – युक्लिडने ही गोष्ट सर्वप्रथम सिद्ध करून दाखविली. असे समजू की सामान्य संख्या मर्यादित आहेत व यापैकी शेवटची संख्या N आहे. म्हणून:

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot N=N!$$

आता त्यामध्ये 1 मिळवू म्हणजे

$$N!+1.$$

ही संख्या प्राप्त होते. ही संख्या पूर्ण असल्यामुळे त्यामध्ये निदान एक तरी अविभाज्य गुणक असावयास हवा म्हणजेच तिला कोणत्यातरी एका अविभाज्य संख्येने भाग जायला हवा. परंतु आपण गृहीत धरल्या-नुसार सर्व अविभाज्य संख्या N पेक्षा छोटचा आहेत, $N!+1$ या संख्येला N समान किंवा त्यापेक्षा छोटचा संख्येने पूर्ण भाग जात नाही, प्रत्येक वेळी बाकी शिल्लक राहते – 1.

म्हणून अविभाज्य संख्या मर्यादित आहेत असे समजणे चुकीचे ठरते. अशा प्रकारे विभाज्य संख्यांची कितीही लांबलचक मालिका जरी आपणाला आढळून आली तरी त्यानंतर येणाऱ्या अविभाज्य संख्यांची संख्या अमर्याद आहे यात शंकाच नाही.

सर्वात मोठी ज्ञात अविभाज्य संख्या

अनेक अविभाज्य संख्या अस्तित्वात आहेत याबाबतीत विश्वास बाळगणे वेगळे आणि कोणत्या संख्या अविभाज्य आहेत हे ठाऊक असणे वेगळे. नैसर्गिक संख्या जितकी मोठी, ती अविभाज्य संख्या आहे की नाही हे शोधून काढण्यासाठी 'तितकाच मोठा हिशेब मांडावा लागतो. आज ज्ञात असलेली सर्वात मोठी अविभाज्य संख्या आहे:

$$2^{2281}-1$$

या संख्येत जवळजवळ सातशे दशकांची चिन्हे आहेत. आधुनिक गणकयंत्राच्या मदतीने आपणाला ठाऊक झाले आहे की ही संख्या एक अविभाज्य संख्या आहे (पहा : प्रकरण 1 आणि 2).

जबाबदारीचा हिशेब

गणनक्रियांमध्ये कधी कधी अशा प्रकारच्या अंकगणिती प्रक्रियांशी दोन हात करावयाची वेळ येते की बीजगणिताच्या मदतीवाचून पुढे पाऊल टाकणे अशक्यच. आता पुढील उदाहरणच पहा :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}$$

विद्युत चुंबकीय लहरीच्या प्रसरण वेगाच्या तुलनेने कमी वेगाने होणाऱ्या वस्तूंच्या हालचालींचा अभ्यास करणारे तंत्रविज्ञान, सापेक्षतावादाने घडवून आणलेल्या या क्षेत्रातील बदलाच्या निरपेक्ष वेगासंबंधित पूर्वीच्याच नियमाचा आधार घेते. या जुन्या नियमानुसार सेकंदास अनुक्रमे v_1 आणि v_2 कि. मी. वेगाने दोन समान हालचालींमध्ये भाग घेणाऱ्या वस्तूचा वेग सेकंदास (v_1+v_2) कि. मी. असतो. नव्या नियमानुसार हा वेग सेकंदास

$$\frac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}}$$ कि . मी . असेल

जेथे c – प्रकाशाचा वेग (हा जवळजवळ सेकंदास 300000 कि. मी. असतो). थोडक्यात म्हणजे प्रत्येक सेकंदास 1 कि. मी. वेगाने दोन समान दिशेने गतीमान असलेल्या वस्तूंचा वेग जुन्या नियमानुसार सेकंदास 2 कि. मी. असेल तर नव्या नियमानुसार हा वेग सेकंदास

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}}$$ कि . मी . असेल .

दोन्ही वेगामधील फरक आहे तरी किती ? सूक्ष्म फरकाची नोंद करू शकणाऱ्या उपकरणास हा फरक जाणून घेता येईल काय ? हे पाहण्यासाठीच तर वरील हिशेब मांडणे आवश्यक आहे.

हा हिशेब दोन प्रकारे करण्याचा प्रयत्न करू: प्रथम अंकगणिताच्या साहाय्याने व त्यानंतर बीजगणिताच्या मदतीने. एका दृष्टिक्षेपातच आपणाला बीजगणितातील पद्धतींच्या फायद्याची कल्पना येईल.

प्रथम आपण हे समीकरण सोपे करू:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}} = \frac{180000000000}{90000000001}.$$

आता नेहमीच्या पद्धतीने भागाकार करू:

180000000000 | 90 000 000 001
90000000001   1.999 999 999 977....
899999999990
810000000009
899999999810
810000000009
899999998010
810000000009
899999980010
810000000009
899999800010
810000000009
899998000010
810000000009
899980000010
810000000009
899800000010
810000000009
898000000010
810000000009
880000000010
810000000009
.700000000010
630000000007
70000000003

आपणाला दिसून आलेच असेल की हा भागाकार संपण्याचे काही चिन्हच दिसत नाही, शिवाय तो कंटाळवाणा व गुंतागुंतीचा आहे. अगदी सहजगत्या चूक होऊ शकते.

हाच भागाकार बीजगणिताच्या मदतीने किती सहजगत्या करता येतो ते आता पाहू या. हा भागाकार पुढील सर्वसाधारण समीकरणाच्या साहाय्याने मांडला जातो: जर a हा सर्वात लहान असेल तर

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a,$$

जेथे $\approx$ या चिन्हाचा अर्थ असेल "जवळजवळ समान."

हे समीकरण बरोबर आहे हे आपणाला सहज सिद्ध करता येते: 1 ची तुलना भाजकांच्या गुणाकाराशी करू या:

$$1 = (1+a)(1-a).$$

म्हणजेच

$$1 = 1 - a^2.$$

a – हा सर्वात लहान अपूर्णांक (उदा. 0.001) असल्यामुळे a^2 – देखील त्याहूनही लहान अपूर्णांक (0.000001) असेल.

आता या गोष्टीचा आपल्या हिशेबामध्ये उपयोग करू:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90000000000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9 \times 10^{10}}} \approx$$

$$\approx 2(1 - 0.111... \times 10^{-10}) = 2 - 0.000\,000\,000\,0222... =$$
$$= 1.9999999999777...$$

आपणाला पूर्वीइतकेच उत्तर मिळाले, परंतु अगदी छोट्या मार्गाने.

आता यापुढे आपण पुढील समीकरण वापरू:

$$\frac{A}{1+a} \approx A(1-a).$$

जेव्हा बीजगणिताची मदत नाकारावी लागते...

कधी कधी असेही प्रसंग येतात जेव्हा अंकगणिताला बीजगणिताची मदत नाकारावी लागते कारण या मदतीमुळे सुलभता तर येत नाहीच पण गुंतागुंत मात्र बरीच वाढते. अशा प्रकारचे एक उदाहरण विचारादाखल घेऊ.

अशी छोटयात छोटी संख्या शोधून काढा जिला

2	ने	भाग	दिला	असता	बाकी	1	राहील,
3	»	»	»	»	»	2	»,
4	»	»	»	»	»	3	»,
5	»	»	»	»	»	4	»,
6	»	»	»	»	»	5	»,
7	»	»	»	»	»	6	»,
8	»	»	»	»	»	7	»,
9	»	»	»	»	»	8	».

उत्तर :

वरवर पाहता आपणाला असे वाटेल की या प्रश्नाचे उत्तर शोधून काढण्यासाठी बरीच समीकरणे मांडावी लागतील.

पण कोणत्याही समीकरणांची, बीजगणिताची या ठिकाणी मदत घ्यावी लागत नाही. केवळ अंकगणिताच्या मदतीने अत्यंत सोप्या रीतीने या प्रश्नाचे उत्तर देता येते.

आपण ज्या संख्येच्या शोधात आहोत त्यामध्ये 1 मिळवू. 2 ने भाग दिला असता आता किती शिल्लक राहील? बाकी असेल $1+1=2$ दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे म्हणजे या संख्येला 2 ने पूर्ण भाग जाईल.

आशाच प्रकारे 3, 4, 5, 6, 7, 8 आणि 9 या संख्यांनी देखील या संख्येस पूर्ण भाग जाईल. अशा प्रकारची छोटयात छोटी संख्या असेल $9\times8\times7\times5=2520$ आणि आपणाला हवी असलेली संख्या असेल 2519.

प्रकरण 4

डिओफॅन्ट समीकरणे

स्वेटरची खरेदी

उत्तर :

आपणास दुकानामध्ये खरेदी केलेल्या स्वेटरची 19 रुबल किंमत चुकती करावयाची आहे. आपल्याजवळ फक्त तीन रुबलच्या नोटा आहेत तर दुकानातील विक्रेत्याजवळ फक्त पाच रुबलच्या नोटा आहेत. या नोटांच्या साहाय्याने आपण ही किंमत चुकती करू शकाल काय व कशी ?

थोडक्यात म्हणजे स्वेटरची किंमत पूर्णतः चुकती करण्यासाठी आपणाला तीन रुबलच्या किती नोटा द्याव्या लागतील व विक्रेत्याला पाच रुबलच्या किती नोटा आपणाला परत द्याव्या लागतील हे शोधावयाचे आहे. या कोड्यामध्ये दोन संख्या अज्ञात आहेत : तीन रुबलच्या नोटांची संख्या (x) आणि पाच रुबलच्या नोटांची संख्या (y), परंतु फक्त एकच समीकरण आपण मांडू शकतो :

$$3x - 5y = 19.$$

ही गोष्ट खरी की दोन अज्ञात संख्या असलेले समीकरण सोडविण्याचे अनेक मार्ग आहेत परंतु x आणि y ची किंमत सांगू शकणारा कोणताच मार्ग नाही. म्हणूनच बीजगणिताने अशा प्रकारची "संदिग्ध" समीकरणे सोडविण्याचा मार्ग शोधून काढला. याचे श्रेय जाते ते विख्यात प्राचीन गणितज्ञ डिओफॅन्टला. म्हणूनच या समीकरणांना डिओफॅन्टची समीकरणे म्हणतात.

उत्तर :

या उदाहरणाच्या आधारावर ही समीकरणे कशी सोडविली जातात ते दाखवू.

$$3x - 5y = 19.$$

या समीकरणामधील x आणि y च्या किंमती शोधून काढावयाच्या आहेत. आपणाला ठाऊक आहे की x आणि y या संख्या पूर्ण आहेत.

या समीकरणाची

$$3x = 19 + 5y$$

अशी पुनर्रचना केली असता

$$x = \frac{19+5y}{3} = 6 + y + \frac{1+2y}{3}.$$

अशी x ची किंमत व्यक्त करता येईल.

x, 6 आणि y या संख्या पूर्ण असल्यामुळे जर $\frac{1+2y}{3}$ ही राशी पूर्ण संख्या असेल तरच हे समीकरण बरोबर आहे असे म्हणता येईल. ही पूर्ण संख्या t आहे असे समजू. म्हणून

$$x = 6 + y + t,$$

जेथे

$$t = \frac{1+2y}{3},$$

आणि याचा अर्थ

$$3t = 1 + 2y, \quad 2y = 3t - 1.$$

शेवटच्या समीकरणाच्या साहाय्याने y ची किंमत प्राप्त होईल :

$$y = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}.$$

y आणि t या संख्या पूर्ण असल्यामुळे $\frac{t-1}{2}$ ही सुद्धा एक पूर्ण संख्या – t_1 आहे परिणामी,

$$y=t+t_1,$$

शिवाय

$$t_1=\frac{t-1}{2},$$

त्या अर्थी

$$2t_1=t-1 \text{ आणि } t=2t_1+1.$$

या पूर्वीच्या समीकरणामध्ये $t=2t_1+1$ ही किंमत घालू :

$$y=t+t_1=(2t_1+1)+t_1=3t_1+1,$$
$$y=6+y+t=6+(3t_1+1)+(2t_1+1)=8+5t_1$$

अशा प्रकारे x आणि y च्या खालील किंमती प्राप्त होतात.

$$x=8+5t_1,$$
$$y=1+3t_1.$$

आपणाला हे ठाऊक आहे की x आणि y ह्या पूर्ण संख्या आहेत शिवाय त्या 0 पेक्षा मोठ्या आहेत. परिणामी,

$$8+5t_1>0,$$
$$1+3t_1>0.$$

यावरून आपणाला असे म्हणता येईल की,

$$5t_1>-8 \text{ आणि } t_1>-\frac{8}{5},$$
$$3t_1>-1 \text{ आणि } t_1>-\frac{1}{3}.$$

या ठिकाणी t_1 च्या किंमतीवर मर्यादा पडते; ही किंमत $-\frac{1}{3}$ पेक्षा जास्त आहे (आणि याचा अर्थ $-\frac{8}{5}$ पेक्षाही जास्त आहे). परंतु t_1 ही एक पूर्ण संख्या असल्यामुळे त्याची किंमत पुढीलप्रमाणेच असू शकते :

$$t_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

वरील विवेचनावरून आपणाला x आणि y च्या पुढील किंमती ठरविता येतील :

$$x=8+5t_1=8,\ 13,\ 18,\ 23,\ldots$$
$$y=1+3t_1=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ldots$$

आता स्वेटरची किंमत कशा प्रकारे चुकती करता येईल ते पाहू : आपणाला 3 रुबलच्या 8 नोटा देऊन 5 रुबलची एक नोट विक्रेत्या-कडून परत घ्यावी लागेल :

$$8\times3-5=19,$$

किंवा 13 तीन रुबलच्या नोटा देऊन 4 पाच रुबलच्या नोटा परत घ्या-व्या लागतील :

$$13\times3-4\times5=19 \text{ इ.}$$

आता आपण या कोडयाकडे पुन्हा एकदा वळू. वाचकांना चांगल्या प्रकारे कळावे यासाठी आपण कोडयात थोडासा बदल करू. असे समजू की ग्राहकाकडे फक्त पाच रुबलच्या तर विक्रेत्याकडे केवळ तीन रुबल-च्या नोटा होत्या. जर असे असेल तर या कोडयाचे उत्तर मिळवि-ण्याकरता पुढील मालिका दर्शविता येईल :

$$x=5,\ 8,\ 11,\ldots,$$
$$y=2,\ 7,\ 12,\ldots$$

कारण

$$5\times5-2\times3=19$$
$$8\times5-7\times3=19,$$
$$11\times5-12\times3=19,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\qquad\cdot$$

मूळ कोडयाच्या उत्तरांच्या आधारावर आपणाला साध्या बीज-गणिती क्रियांच्या साहाय्याने हे निर्णय प्राप्त करता आले असते. पाच रुबलच्या नोटा देऊन तीन रुबलच्या नोटा परत घेणे आणि त्याउलट तीन रुबलच्या नोटा देऊन पाच रुबलच्या नोटा परत घेणे एकच असल्या-

मुळे या नव्या प्रश्नाच्या उत्तरादाखल मूळ कोड्यातील समीकरणाचाच वापर करता येतो :

$$3x - 5y = 19,$$

परंतु या ठिकाणी अशी अट असेल की x आणि y ह्या संख्या ऋण असायला हव्यात म्हणून

$$x = 8 + 5t_1, \qquad y = 1 + 3t_1.$$

या समीकरणांवरून आपणाला $x < 0$ आणि $y < 0$ हे माहीत असल्यामुळे असे म्हणता येईल की

$$8 + 5t_1 < 0,$$
$$1 + 3t_1 < 0$$

आणि परिणामी

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

$t_1 = -2, -3, -4$ इत्यादी किंमती घातल्यानंतर या पूर्वीच्या समीकरणांवरून आपणाला x आणि y च्या पुढील किंमती प्राप्त होतात :

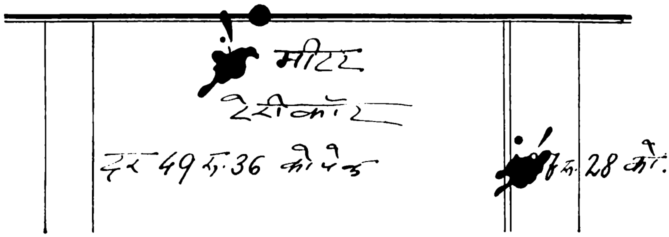
$$t_1 = -2, -3, -4,$$
$$x = -2, -7, -12,$$
$$y = -5, -8, -11.$$

उत्तरांच्या पहिल्या जोडीचा ($x = -2$, $y = -5$ चा) अर्थ असा की ग्राहक -2 तीन रुबलच्या नोटा देईल आणि -5 पाच रुबलच्या नोटा परत घेईल", म्हणजेच पाच रुबलच्या 5 नोटा देईल आणि तीन रुबलच्या दोन नोटा विक्रेत्याकडून परत घेईल.

दुकानातील जमाखर्चाची तपासणी

प्रश्न :

एका दुकानात व्यापारी जमाखर्चाच्या वहीमध्ये शाई पडलेली पुढील प्रकारची एक पावती आढळून आली.



आकृती 11

किती मीटर कापड खरेदी करण्यात आले होते व एकूण किती रुबल त्यासाठी देण्यात आले होते याचा काहीच पत्ता त्या पावतीवरून लागत नव्हता. चुकती करण्यात आलेल्या रकमेपैकी शेवटचे तीन अंकच काय ते नजरेस पडत होते, पण त्यापूर्वीचे तीन अंक मात्र कळावयास मार्ग नव्हता. तपासणी करणाऱ्यांना एवढ्या गोष्टींच्या आधारावर या कागदाचे पूर्ण स्वरूप स्पष्ट करता येईल काय?

उत्तर :

एकूण मीटरची संख्या x आहे असे समजू. म्हणजे चुकती करण्यात आलेली एकूण रक्कम कोपेकमध्ये होती :

$$4936\,x.$$

पावतीवरील शाईमुळे न दिसणारे तीन अंक y आहेत असे समजू. ही संख्या अर्थातच हजार कोपेकमध्ये असेल व एकूण रक्कम कोपेकमध्ये असेल :

$$1\,000\,y + 728.$$

यावरून पुढील समीकरण प्राप्त होते :

$$4\,936\,x=1\,000\,y+728,$$

किंवा पूर्ण समीकरणास 8 ने भाग दिला असता,

$$617\,x-125\,y=91.$$

या समीकरणामध्ये x आणि y या संख्या पूर्ण असून y ची किंमत 999 पेक्षा जास्त असू शकणार नाही कारण तीमध्ये तीनपेक्षा अधिक अंक असूच शकणार नाहीत. पूर्वीप्रमाणेच हेही समीकरण सोडवू :

$$125\,y=617\,x-91,$$

$$y=5\,x-\frac{1+34-8x}{125}=5\,x-1+\frac{2(17-4x)}{125}=5x-1+2\,t.$$

(कमीत कमी शिल्लक रहावी या हेतूने आपण या ठिकाणी $\frac{617}{125}=5-\frac{8}{125}$ असे समजत आहोत.

$$\frac{2(17-4x)}{125}$$

ही राशी एक पूर्ण संख्याच असली पाहिजे जिचा उल्लेख आपण t असा करीत आहोत.)

पुढे

$$\frac{17-4x}{125}=t$$

या समीकरणावरून

$$17-4\,x=125\,t$$

$$x=4-31t+\frac{1-t}{4}=4-31t+t_1,$$

जेथे

$$t_1=\frac{1-t}{4}\,,$$

आणि परिणामी

$$4t_1=1-t;$$
$$t=1-4t_1;$$
$$x=125t_1-27,$$
$$y=617t_1-134.$$

आपणाला ठाऊक आहे की

$$100 \leqslant y < 1\,000$$

म्हणजेच

$$100 \leqslant 617\,t_1-134 < 1\,000,$$

ज्यावरून

$$t_1 \geqslant \frac{234}{517} \text{ आणि } t_1 < \frac{1134}{617}.$$

t_1 साठी फक्त एकच पूर्ण किंमत असू शकते :

$$t_1=1,$$

जर असे असेल तर

$$x=98, \qquad y=483,$$

म्हणजेच 98 मीटर कापड खरेदी करण्यात आले होते व 4837 रुबल्स 28 कोपेक्स चुकते करण्यात आले होते.

पोस्टाच्या तिकीटांची खरेदी

प्रश्न :

एक रूबलमध्ये पोस्टाची 40 तिकीटे खरेदी करावयाची आहेत. ही 40 तिकीटे 1 कोपेकची, 4 कोपेकची आणि 12 कोपेकची अशा

तीन प्रकारांची हवी आहेत. तेव्हा 1 रूबलमध्ये वरील तिन्ही प्रकारची किती तिकीटे खरेदी करता येतील?

उत्तर :

या ठिकाणी आपणाला तीन अज्ञात किंमती असलेली दोन समीकरणे मांडता येतात :

$$x+4y+12z=100,$$
$$x+y+z=40,$$

जेथे $x=$ एक कोपेकच्या तिकीटांची संख्या, $y=4$ कोपेकच्या तिकीटांची संख्या व $z=12$ कोपेकच्या तिकीटांची संख्या आहे.

पहिल्या समीकरणामधून दुसरे समीकरण वजा केले असता दोन अज्ञात संख्या असणारे एक समीकरण प्राप्त होते :

$$3y+11z=60$$

म्हणून

$$y=20-11x\cdot\frac{z}{3}.$$

खरे पाहता $\frac{z}{3}$ ही पूर्ण संख्या आहे. ही संख्या t आहे असे समजू. तेव्हा

$$y=20-11t,$$
$$z=3t.$$

सुरुवातीच्या दोन मूळ समीकरणांपैकी दुसऱ्या समीकरणामधील y आणि z च्या जागी किंमती घालू :

$$x+20-11t+3t=40;$$

म्हणून

$$x=20+8\,t$$

ज्याअर्थी $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ आणि $z \geqslant 0$ त्याअर्थी

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \frac{9}{11}.$$

यावरून हे दिसून येते की t ची किंमत फक्त दोन संख्याच असू शकतील

$$t=0 \text{ आणि } t=1.$$

म्हणजेच x, y आणि z च्या किंमती पुढीलप्रमाणेच असू शकतील :

t =	0	1
x =	20	28
y =	20	9
z =	0	3

आपले हे उत्तर पुढील प्रकारे तपासून पाहता येईल

$$20 \times 1 + 20 \times 4 + 0 \times 12 = 100,$$
$$28 \times 1 + 9 \times 4 + 3 \times 12 = 100.$$

अशा प्रकारे 1 रूबलमध्ये पोस्टाची 1, 4 आणि 12 कोपेक किंमतीची 40 तिकीटे फक्त दोन प्रकारेच खरेदी करता येतील. जर वरील प्रत्येक किंमतीचे निदान एक तरी तिकीट असायलाच हवे अशी अट असेल तर तिकीटे खरेदी करण्याचा एकच मार्ग शिल्लक राहतो.

पुढील कोडयाचे स्वरूपदेखील याचप्रमाणे आहे.

फळांची खरेदी

प्रश्न :

पाच रूबलमध्ये 100 निरनिराळी फळे खरेदी करण्यात आलेली आहेत. त्यांच्या किंमती पुढीलप्रमाणे आहेत

कलिंगडे प्रत्येकी	50 कोपेक
सफरचंद प्रत्येकी	10 कोपेक
चेरी प्रत्येकी . . .	1 कोपेक

प्रत्येक प्रकारची किती किती फळे खरेदी करण्यात आलेली होती?

उत्तर :

कलिंगडांची संख्या x, सफरचंदांची y आणि चेरींची z आहे असे समजू: यावरून आपणाला पुढील दोन समीकरणे मिळतात :

$$\begin{cases} 50x+10y+1z=500, \\ x+y+z=100. \end{cases}$$

पहिल्या समीकरणामधून दुसरे समीकरण वजा केले असता दोन अज्ञात संख्या असलेले एक समीकरण मिळते :

$$49x+9y=400.$$

या समीकरणाच्या आधारावर आपणाला अशा प्रकारे पुढे वाटचाल करता येईल :

$$y=\frac{400-49x}{9}=44-5x+\frac{4(1-x)}{9}=44-5x+4t,$$

$$t=\frac{1-x}{9}, \qquad x=1-9t$$

$$y=44-5(1-9t)+4t=39+49t.$$

ज्याअर्थी

$$1-9t \geqslant 0 \text{ आणि } 39+49t \geqslant 0$$

त्याअर्थी

$$\frac{1}{9} \geqslant t \geqslant -\frac{39}{49}$$

आणि परिणामी $t=0$ म्हणून

$$x=1, \qquad y=39.$$

सुरुवातीच्या आपल्या दोन समीकरणांपैकी दुसऱ्या समीकरणामध्ये x आणि y च्या किंमती घातल्या असता :

$$z = 60.$$

अशा प्रकारे 5 रूबल्समध्ये 1 कलिंगड, 39 सफरचंदे आणि 60 चेरी खरेदी करण्यात आले होते.

वाढदिवस ओळखा

प्रश्न :

आतापावेतो आपण पाहिलेल्या समीकरणांच्या आधारावर आपण पुढील "गणिती जादू" करून दाखवू शकतो.

आता आपण आपल्या मित्राचा जन्मदिवस अचूकपणे ओळखणार आहात.

आपण आपल्या मित्रास त्याच्या जन्मतारखेला 12 ने आणि महिन्याला 31 ने गुणावयास सांगा. तो आपणाला या गुणाकारांच्या अंती मिळणारी संख्या सांगेल आणि त्यावरून आपण त्याचा जन्मदिवस सांगू शकाल.

उदाहरणार्थ जर आपल्या मित्राचा जन्म 9 फेब्रुवारीस झालेला असेल तर तो पुढील गुणाकार करून आपणाला एकूण संख्या सांगेल :

$$9 \times 12 = 108, \quad 2 \times 31 = 62,$$
$$108 + 62 = 170$$

ही एवढी एकच संख्या, 170 तो आपणाला सांगेल. मग आपण त्याचा जन्मदिवस कसा सांगाल?

उत्तर :

या कोड्याचे उत्तर खालील समीकरणाच्या आधाराने शोधून काढता येईल :

$$12x + 31y = 170$$

आपले उत्तर पूर्ण आणि शून्यापेक्षा मोठ्या संख्येत असेल, शिवाय दिवसाची संख्या x 31 पेक्षा अधिक व महिन्यांची संख्या 12 पेक्षा जास्त असता कामा नये.

$$x = \frac{170-31y}{12} = 14 - 3y + \frac{2+5y}{12} = 14 - 3y + t,$$

$$2+5y = 12t,$$

$$y = \frac{-2+12t}{5} = 2t - 2\times\frac{1-t}{5} = 2t - 2t_1,$$

$$1 - t = 5t_1,\ \ t = 1 - 5t_1,$$

$$y = 2(1-5t_1) - 2t_1 = 2 - 12t_1,$$

$$x = 14 - 3(2-12t_1) + 1 - 5t_1 = 9 + 31t_1.$$

$$31 \geqslant x > 0 \text{ आणि } 12 \geqslant y > 0$$

आपणाला ठाऊक असल्यामुळे t_1 च्या मर्यादा आपणाला ठरविता येतील :

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{6}.$$

म्हणून

$$t_1 = 0,\quad x = 9,\quad y = 2.$$

मित्राच्या जन्माची तारीख आहे 9 आणि महिना आहे 2 रा म्हणजेच 9 फेब्रुवारी.

समीकरणांचा वापर न करता हे कोडे दुसऱ्या पद्धतीनेदेखील सोडविता येणे शक्य आहे. आपणाला $a = 12x + 31y$ ही संख्या सांगण्यात आलेली आहे. ज्या अर्थी $12x + 24y$ या संख्येस 12 ने भाग जातो त्याअर्थी 7y आणि a ला 12 ने भाग दिल्यास बाकी समान राहते. त्यांना 7 ने गुणले असता मिळणाऱ्या 49y आणि 7a ला 12 ने भाग दिल्यास समान बाकी (शिल्लक) राहते. परंतु $49y = 48y + y$ आणि 48y ला 12 ने भाग जातो. म्हणजेच,

y आणि 7a ला 12 ने भाग दिल्यास सारखीच बाकी राहते. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास, जर a ला 12 ने पूर्ण भाग जात नसेल तर 7a ला 12 ने भाग देऊन बाकी राहणाऱ्या संख्येइतकीच y ही संख्या आहे आणि जर a ला 12 ने पूर्ण भाग जात असेल तर y=12 यावरून y (महिना) सहज ठरविता येतो. आणि एकदा y ची किंमत कळली तर x ची किंमत काढणे फारच सोपे.

एक छोटासा सल्ला: 7a ला 12 ने भाग दिल्यानंतर राहिलेली बाकी जाणून घेण्यापूर्वी सोयीसाठी a ऐवजी तिला 12 ने भाग दिल्यानंतर राहणारी बाकी विचारात घ्या. उदाहरणार्थ जर a=170 असेल तर आपणाला मनामध्ये पुढील हिशेब मांडावा लागेल:

$$170 = 12 \times 14 + 2 \text{ (म्हणजे बाकी 2 राहतील)}$$
$$2 \times 7 = 14;\ 14 = 12 \times 1 + 2 \text{ (म्हणजेच } y=2);$$
$$x = \frac{170-31y}{12} = \frac{170-31 \times 2}{12} = \frac{108}{12} = 9 \text{ (म्हणजे } x=9).$$

अशा प्रकारे आपणाला उत्तर ठरविता येईल. महिना दुसरा म्हणजेच (y=2) फेब्रुवारी व तारीख 9.

आपली ही "जादू" नेहमीच यशस्वी होते हे आता आपण सिद्ध करू. असे समजू की आपल्या मित्राने वरील प्रकारे बेरीज करून आपणाला a ही संख्या सांगितली आहे. त्याचा जन्मदिवस व महिना पुढील समीकरणात लपलेले आहेत:

$$12x + 31y = a.$$

सुरुवात आपण उलट बाजूकडून करू. असे समजू की हे समीकरण दोन प्रकारे सोडविता येते, उत्तरादाखल आपणाला x_1, y_1 आणि x_2, y_2 या दोन पूर्ण आणि धन संख्या मिळतात पैकी x_1 आणि x_2 31 पेक्षा मोठ्या नाहीत तर y_1 आणि y_2 12 पेक्षा लहान आहेत. याचा अर्थ:

$$12x_1 + 31y_1 = a,$$
$$12x_2 + 31y_2 = a.$$

पहिल्या समीकरणामधून दुसरे समीकरण वजा केले असता :

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$$

या समानतेवरून असे म्हणता येते की $12(x_1 - x_2)$ या संख्येस 31 ने पूर्ण भाग जातो. ज्याअर्थी x_1 आणि x_2 या धन संख्या (0 पेक्षा मोठ्या) असून 31 पेक्षा लहान आहेत त्याअर्थी $x_1 - x_2$ हा फरकदेखील 31 पेक्षा लहान आहे. म्हणून $12(x_1 - x_2)$ या संख्येला, जर $x_1 = x_2$ असेल, म्हणजेच दोन्ही उत्तरे एकच असतील तरच 31 ने भाग जाईल. अशा प्रकारे सुरुवातीच्या समीकरणाची दोन उत्तरे आहेत म्हणजेच ते दोन प्रकारे सोडविता येते हे विधान विसंगत ठरते.

कोंबड्यांची विक्री

जुन्या काळापासून चालत आलेले एक कोडे :

तीन बहिणी कोंबड्या विकण्यासाठी बाजारात आल्या. एका बहिणीकडे 10, दुसऱ्याकडे 16 तर तिसऱ्या बहिणीकडे 26 कोंबड्या होत्या. दुपारपर्यंत तिन्ही बहिणींनी एकाच दराने काही कोंबड्या विकल्या. दुपारनंतर कोंबड्या विकल्या जाणार नाहीत या भीतीने त्यांनी किंमत कमी केली व पुन्हा एकाच दराने बाकीच्या कोंबड्या विकून टाकल्या. सायंकाळी सर्व बहिणी जेव्हा घरी परतल्या तेव्हा त्यांच्याजवळ समान रक्कम होती – 35 रूबल.

दुपारपर्यंत आणि दुपारनंतर त्यांनी काय दराने कोंबड्या विकल्या ?

उत्तर :

प्रत्येक बहिणीने दुपारपर्यंत विकलेल्या कोंबड्यांच्या संख्या x, y आणि z होत्या असे समजू. दुपारनंतर त्यांनी $10 - x$, $16 - y$ आणि $26 - z$ कोंबड्या विकल्या असा याचा अर्थ होतो. दुपारपर्यंतचा कोंबड्यांचा दर m होता व दुपारनंतर तो n होता असे समजू. सोयीसाठी आपण पुढील कोष्टक तयार करू :

विकल्या गेलेल्या कोंबड्याची संख्या				दर
दुपारपर्यंत . .	x	y	z	m
दुपारनंतर . .	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

पहिल्या बहिणीला मिळालेले पैसे :

$$mx+n(10-x);\ \text{म्हणून},$$
$$mx+n(10-x)=35;$$

दुसऱ्या –

$$my+n(16-y),\ \text{म्हणून}$$
$$my+n(16-y)=35;$$

आणि तिसऱ्या –

$$mz+n(26-z),\ \text{म्हणून},$$
$$mz+n(26-z)=35.$$

अशा प्रकारे आपणास पुढील तीन समीकरणे मिळतात :

$$\begin{cases}(m-n)x+10n=35,\\(m-n)y+16n=35,\\(m-n)z+26n=35.\end{cases}$$

तिसऱ्या समीकरणामधून अनुक्रमे पहिले व दुसरे समीकरण वजा केले असता :

$$\begin{cases}(m-n)(z-x)+16n=0,\\(m-n)(z-y)+10n=0,\end{cases}$$

किंवा

$$\begin{cases}(m-n)(x-z)=16n,\\(m-n)(y-z)=10n.\end{cases}$$

पहिल्या समीकरणास दुसऱ्या समीकरणाने भाग दिला असता :

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5}\text{; किंवा } \frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}.$$

ज्या अर्थी x, y, z या संख्या पूर्ण आहेत त्या अर्थी $x-z$, $y-z$ हे फरकदेखील पूर्ण संख्यांच्या स्वरूपात आहेत. म्हणून

$$\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}$$

ही समानता टिकवून ठेवण्यासाठी $x-z$ ला 8 ने आणि $y-z$ ला 5 ने पूर्ण भाग जाणे आवश्यक आहे. परिणामी,

$$\frac{x-z}{8}=t=\frac{y-z}{5}.$$

म्हणजेच

$$x=z+8t,$$
$$y=z+5t.$$

या ठिकाणी एक गोष्ट लक्षात घेतली पाहिजे की t ही संख्या केवळ पूर्णच नाही तर धन आहे, कारण $x>z$ (जर याविरुद्ध परिस्थिती असती तर पहिल्या बहिणीस तिसऱ्या बहिणीइतके पैसे मिळाले नसते).

ज्याअर्थी $x<10$ त्याअर्थी

$$z+8t<10.$$

z आणि t या पूर्ण आणि धन संख्या असल्यामुळे शेवटचे समीकरण $(z+8t<10)$ जर $z=1$ आणि $t=1$ असेल तरच बरोबर ठरेल. z आणि t च्या या किंमती समीकरणात घातल्यानंतर :

$$x=z+8t \text{ आणि } y=z+5t,$$

म्हणजेच : $x=9$ आणि $y=6$.

आता आपण पुन्हा पुढील समीकरणांकडे वळू :

$$mx+n(10-x)=35,$$
$$my+n(16-y)=35,$$
$$mz+n(26-z)=35.$$

आपणाला ठाऊक झालेल्या x, y आणि z च्या किंमती त्यामध्ये घालू व काय दराने कोंबडचा विकण्यात आल्या ते पाहू :

$$m = 3\frac{3}{4} \text{ रूबल}. \qquad n = 1\frac{1}{4} \text{ रुबल}.$$

अशा रीतीने 3 रूबल 75 कोपेक या दराने दुपारपर्यंतच्या व 1 रूबल 25 कोपेक या दराने दुपारनंतरच्या कोंबडचा विकल्या गेल्या होत्या.

दोन संख्या आणि चार क्रिया

प्रश्न :

या पूर्वीच्या कोडचाच्या संदर्भात आपण पाच अज्ञात संख्या असलेली तीन समीकरणे विचारात घेतली. ही समीकरणे आपण एका सर्वसामान्य नमुन्यानुसार सोडवली नाहीत तर स्वतंत्र गणिती पद्धतींच्या आधारावर त्यांचा विचार केला. अगदी त्याचप्रमाणे आपण पुढील कोडी सोडविणार आहोत. त्यापैकी पहिले कोडे हे असे आहे :

दोन पूर्ण धन संख्यांवर पुढील चार गणिती संस्कार करण्यात आले :

1) त्यांची बेरीज करण्यात आली ;

2) मोठचा संख्येतून लहान संख्या वजा करण्यात आली ;

3) त्यांचा गुणाकार करण्यात आला ;

4) मोठचा संख्येला लहान संख्येने भाग देण्यात आला.

मिळालेल्या संख्यांची बेरीज करण्यात आली असता 243 हे उत्तर मिळाले. या दोन संख्या कोणत्या ?

उत्तर :

जर मोठी संख्या x आणि लहान संख्या y असेल तर,

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=243.$$

या समीकरणास y ने गुणून कंस सोडविल्यास आपणाला पुढील राशी मिळतात

$$x(2y+y^2+1)=243y.$$

परंतु

$$2y+y^2+1=(y+1)^2 \text{ म्हणून}$$

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}$$

x ही पूर्ण संख्या असावयास हवी यासाठी $(y+1)^2$ ही राशी 243 या संख्येचा एक भाजक असणे आवश्यक आहे (कारण y मध्ये y + 1 यासह गुणक समाविष्ट असू शकणार नाहीत). $243=3^5$ हे आपणास ठाऊक असल्यामुळे 243 ला फक्त 1, 3^2, 9^2 या पूर्ण वर्गांनीच भाग जाईल. अशा प्रकारे $(y+1)^2$ ची किंमत 1, 3^2 किंवा 9^2 इतकी असायलाच हवी ज्यावरून आपणाला y ची किंमत 8 किंवा 2 आहे हे कळते (y ही एक धन संख्याच असायला हवी हे ध्यानात ठेवणे आवश्यक आहे).

यावरून x ची किंमत

$$\frac{243\times 8}{81} \text{ किंवा } \frac{243\times 2}{9}.$$

म्हणून आपणाला हव्या असणाऱ्या संख्या 24 आणि 8 किंवा 54 आणि 2 या आहेत.

कसा काटकोन चौकोन आहे?

प्रश्न :

काटकोन चौकोनाच्या (आयताच्या) बाजू पूर्ण संख्येत आहेत. या बाजूंची एकूण बेरीज (परिघ) त्याच्या क्षेत्रफळाइतकी व्हावी यासाठी भुजांची लांबी किती असायला हवी?

उत्तर :

समचतुष्कोणाच्या बाजू x आणि y आहेत असे समजून पुढील समीकरण मांडू :

$$2x - 2y = xy.$$

ज्यावरून

$$x = \frac{2y}{y-2}.$$

ज्याअर्थी x आणि y या संख्या धन आहेत त्याअर्थी $y-2$ ही संख्यादेखील धनच असावयास हवी, म्हणजेच y ची किंमत 2 पेक्षा जास्त असावयास हवी.

आता आपणाला दिसून येईल की,

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

ज्याअर्थी x ही एक पूर्ण संख्या असावयास हवी त्याअर्थी $\frac{4}{y-2}$ देखील पूर्ण संख्याच असली पाहिजे. परंतु $y > 2$ असताना ही गोष्ट फक्त तेव्हाच शक्य होईल जेव्हा y ची किंमत 3, 4 किंवा 6 असेल. तेव्हा x ची किंमत असेल 6, 4, 3.

अशा प्रकारे आपणाला हव्या असणाऱ्या काटकोन चौकोनाच्या बाजू 3 किंवा 6 असाव्यात किंवा तो 4 बाजू असलेला चौरस असावयास हवा.

दोन दोनअंकी संख्या

प्रश्न :

46 आणि 96 या संख्यांचे एक खास वैशिष्टय आहे: त्यांच्या अंकांची जरी अदलाबदल केली तरीही त्यांच्या गुणाकारांच्या नंतर मिळणाऱ्या संख्येत बदल होत नाही –

$$46 \times 96 = 4\,416 = 64 \times 69$$

अशाच प्रकारचा गुणधर्म अंगी असणाऱ्या इतर संख्यांच्या जोड्या आहेत काय? त्या कशा शोधता येतील?

उत्तर :

आपणाला हव्या असणाऱ्या संख्यांमधील अंक x आणि y, z आणि t आहेत असे समजू व पुढील समीकरण मांडू.

$$(10x+y)(10z+t)=(10y+x)(10t+z).$$

कंस सोडविला असता पुढील समीकरण मिळते.

$$xz=yt,$$

जेथे x, y, z, t या पूर्ण संख्या असून त्या 10 पेक्षा लहान आहेत. आपणाला हव्या असलेल्या संख्या शोधण्यासाठी 9 अंकांतील समान गुणनफल असलेल्या अंकाच्या जोड्या तयार करू:

$$1\times4=2\times2 \qquad 2\times8=4\times4$$
$$1\times6=2\times3 \qquad 2\times9=3\times6$$
$$1\times8=2\times4 \qquad 3\times8=4\times6$$
$$1\times9=3\times3 \qquad 4\times9=6\times6$$
$$2\times6=3\times4$$

एकूण 9 जोड्या होतात. प्रत्येक जोडीमधून आपणाला हव्या असलेल्या संख्याचे एक किंवा दोन गट तयार करता येतात. उदाहरणार्थ, $1\cdot4=2\cdot2$ या जोडीपासून वरील वैशिष्टय असणाऱ्या संख्याची एक जोडी तयार करू:

$$12\times42=21\times24.$$

$1\cdot6=2\cdot3$ या जोडीपासून दोन जोड्या तयार करू:

$$12\times63=21\times36,$$
$$13\times62=31\times26.$$

अशा प्रकारे आपण पुढील 14 जोड्या तयार करू शकतो:

$12\times42=21\times24$	$23\times96=32\times69$
$12\times63=21\times36$	$24\times63=42\times36$
$12\times84=21\times48$	$24\times84=42\times48$
$13\times62=31\times28$	$26\times93=62\times39$
$13\times93=31\times39$	$34\times86=43\times68$
$14\times82=41\times28$	$36\times84=63\times48$
$23\times64=32\times46$	$46\times96=64\times69$

पायथागोरसच्या संख्या

लंबरूप रेषा आखण्यासाठी भूमापक कर्मकारी जी सोयीस्कर व अचूक पद्धत वापरतात तिचे स्वरूप हे असे आहे. असे समजू की A या बिंदूतून MN या सरळ रेषेला लंब टाकावयाचा आहे (आकृती 12 पहा). A या बिंदूपासून AM या रेषेवर तीन वेळा ठराविक (कोणतेही) अंतर a मोजले जाते. त्यानंतर एखाद्या दोरीवर तीन गाठी मारल्या जातात, ज्यांच्या दरम्यानचे अंतर 4a आणि 5a इतके असते. कडेच्या दोन्ही गाठी A आणि B बिंदूवर धरून दोरी मधल्या गाठीस धरून ताणली जाते. यामुळे एक त्रिकोण निर्माण होतो ज्याचा A कोन काटकोन (90°) असतो.

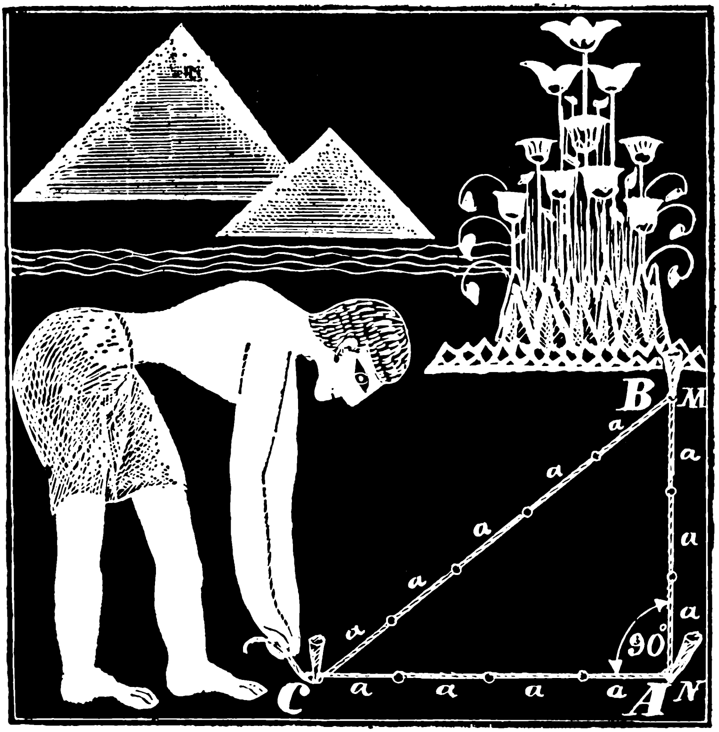
ह्या प्राचीन पद्धतीचा अगदी हजारो वर्षांपूर्वी इजिप्तच्या पिरॅ-मिडच्या रचनाकारांनी वापर केलेला होता. ज्या त्रिकोणाच्या भुजा 3 : 4 : 5 अशा असतात तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो या सर्वांना ठाऊक असलेल्या पायथागोरसच्या सिद्धांतावर ही पद्धत आधारीत आहे कारण या सिद्धांतानुसार

$$3^2+4^2=5^2.$$

3, 4 आणि 5 या संख्यांव्यतिरिक्त

$$a^2+b^2=c^2$$

हा नियम सिद्ध करणाऱ्या a, b आणि c या पूर्ण धन संख्या अमर्याद



आकृती 12

आहेत. या संख्यांना पायथागोरसच्या संख्या असे म्हणतात. पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार अशा प्रकारच्या संख्या कोणत्याही काटकोन त्रिकोणाच्या भुजांची लांबी दाखव शकतात, म्हणून a आणि b बाजूंना "भुजा" म्हणतात तर c ही बाजू "कर्ण" या नावाने ओळखली जाते.

ही गोष्ट स्पष्टच आहे की जर a, b, c, हे पायथागोरसच्या संख्यांचे त्रिकुट असेल तर pa, pb आणि pc या पायथागोरसच्या संख्या आहेत जेथे p – हा पूर्णांकी गुणक आहे. याउलट जर पायथागोरसच्या संख्यांचा एकच समान गुणक असेल तर त्या आधारावर या संख्या कमी करून

शेवटी पुन्हा एकदा पायथागोरसच्या संख्यांचे त्रिकुट परत मिळविता येते. म्हणून सर्वप्रथम आपण फक्त पायथागोरसच्या सर्वसामान्य संख्यांचे त्रिकुट प्राप्त करण्याचा प्रयत्न करू (या संख्यांपासून p या पूर्णांकी गुणकाच्या मदतीने बाकी संख्या मिळविता येतील).

आपण हे दाखवून देऊ की अशा या a, b, c त्रिकुटांपैकी एक भुजा विषमअंकी असेल तर दुसरी सम.

असे समजू की a आणि b या दोन्ही भुजा सम अंकी आहेत. याचा अर्थ $a^2 + b^2$ ही संख्या सम आहे आणि म्हणूनच कर्णदेखील. तथापि, आपले हे प्रतिपादन या पूर्वीच्या "a, b, c या संख्यांमध्ये समान गुणक नाहीत" या विधानाशी पूर्णपणे विसंगत आहे कारण तीन सम संख्यांमध्ये 2 हा समान गुणक आहे. अशा रीतीने a आणि b या भुजांपैकी एक भुजा विषम अंकी असली पाहिजे.

आणखी एक संभाव्यता असू शकते: दोन्ही भुजा विषमअंकी आणि कर्ण समअंकी परंतु हे शक्य नाही असे सिद्ध करून दाखविणे अवघड नाही. प्रत्यक्षात जर भुजांचे स्वरूप

$$2x+1 \text{ आणि } 2y+1,$$

असे असेल तर त्यांच्या वर्गांची बेरीज असेल:

$$4x^2+4x+1+4y^2+4y+1=4(x^2+x+y^2+y)+2.$$

म्हणजेच शेवटी अशी संख्या प्राप्त होईल, जिला चारने भाग दिला असता बाकी 2 राहतील. कोणत्याही सम संख्येच्या वर्गास 4 ने पूर्ण भाग जातो. म्हणजेच दोन विषम संख्यांच्या वर्गांची बेरीज सम संख्यांच्या वर्गाइतकी असू शकणार नाही, दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास आपल्या तिन्ही संख्या ह्या पायथागोरसच्या संख्या नाहीत.

अशा प्रकारे a आणि b या दोन भुजांपैकी एकाची लांबी सम संख्येत आहे तर दुसऱ्या भुजेची लांबी विषम संख्येत आहे म्हणून $a^2 + b^2$ ही संख्या विषम आहे म्हणजेच c या कर्णाची लांबीदेखील विषम संख्येत आहे.

ही गोष्ट अधिक अचूकरित्या स्पष्ट करण्यासाठी असे समजू की

a ही भुजा विषम संख्या आहे तर b ही भुजा समसंख्या आहे. असे असेल तर

$$a^2+b^2=c^2$$

या समानतेमधून आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होईल :

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$$

c + b आणि c — b हे उजव्या बाजूकडील गुणक साधे आहेत. याशिवायच, जर या संख्यांचा एकच साधा, एककापासून वेगळा असा गुणक असला असता तर त्याने यांना भाग गेला असता आणि म्हणजेच

$(c+b)+(c-b)+2c$ या बेरजेचा,
$(c+b)-(c-b)=2b$ या फरकाचा आणि
$(c+b)(c-b)=a^2$ या गुणाकाराचा

म्हणजेच 2c, 2b आणि a या संख्यांचा एकच गुणक असला असता. ज्या अर्थी a ही संख्या विषम आहे. त्या अर्थी हा गुणक 2 पेक्षा वेगळा आहे आणि म्हणून a, b आणि c या संख्यांचा एकच गुणक आहे तथापि ही गोष्ट अशक्यच. या विसंगतीवरून हेच म्हणता येईल की c + b आणि c — b या संख्या सर्वसाधारण आहेत.

परंतु जर साध्या संख्यांचा गुणाकार एक पूर्ण वर्ग असेल तर त्यापैकी प्रत्येक संख्यासुद्धा वर्ग असेल म्हणजेच,

$$\begin{cases} c+b=m^2, \\ c-b=n^2. \end{cases}$$

ही समीकरणे सोडविली असता :

$$c=\frac{m^2+n^2}{2}, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2},$$
$$a^2=(c+b)(c-b)=m^2n^2, \qquad a=mn.$$

अशा प्रकारे आपल्या विचाराधीन असलेल्या पायथागोरसच्या संख्यांचे स्वरूप हे असे असेल :

$$a=mn, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2}, \qquad c=\frac{m^2+n^2}{3},$$

जेथे m आणि n या एखाद्या साध्या विषम संख्या आहेत. याउलट परिस्थिती वाचकांच्या त्वरित ध्यानात येईल: m आणि n ना कोणत्याही विषम किंमती देऊन समीकरणे मांडल्यास आपणाला a, b, c या तीन पायथागोरसच्या संख्या प्राप्त होतात.

m आणि n च्या किंमती वेगवेगळ्या असताना प्राप्त होणाऱ्या पायथागोरसच्या संख्यांची काही त्रिकुटे:

जर	$m=3,\ n=1$	$3^2+4^2=5^2$
	$m=5,\ n=1$	$5^2+12^2=13^2$
	$m=7,\ n=1$	$7^2+24=25^2$
	$m=9,\ n=1$	$9^2+40^2=41^2$
	$m=11, n=1$	$11^2+60^2=61^2$
	$m=13, n=1$	$13^2+84^2=85^2$
	$m=5,\ n=3$	$15^2+8^2=17^2$
	$m=7,\ n=3$	$21^2+20^2=29^2$
	$m=11,\ n=3$	$33^2+56^2=65^2$
	$m=13,\ n=3$	$39^2+80^2=89^2$
	$m=7,\ n=5$	$35^2+12^2=37^2$
	$m=9,\ n=5$	$45^2+28^2=53^2$
	$m=11,\ n=5$	$55^2+48^2=73^2$
	$m=13,\ n=5$	$65^2+72^2=97^2$
	$m=9,\ n=7$	$63^2+16^2=65^2$
	$m=11,\ n=7$	$77^2+36^2=85^2$

(बाकी सर्व त्रिकुटे ही पायथागोरसच्या संख्यांची आहेत किंवा त्यांचे समान गुणक आहेत किंवा 100 पेक्षा मोठ्या संख्यांची आहेत).

पायथागोरसच्या संख्यांची काही वैशिष्टये पुढीलप्रमाणे आहेत:

1) एका भुजेची लांबी तीनच्या पटीत असते.

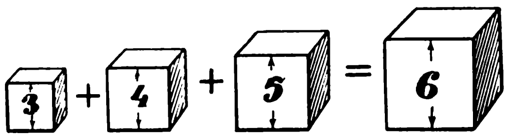
2) एका भुजेची लांबी चारच्या पटीत असते.

3) पायथागोरसच्या संख्यांपैकी एक संख्या पाचच्या पटीत असते. वरील उदाहरणांवरून आपणाला या वैशिष्टयांची खात्री करून घेता येईल.

तिसऱ्या घातासंबंधित सर्वसाधारण समीकरण

तीन पूर्ण संख्यांच्या घनांची बेरीज चौथ्या संख्येच्या घनाइतकी असू शकते, उदाहरणार्थ $3^3+4^3+5^3=6^3$.

याचा अर्थ असा होतो की खेळातील 6 सें. मी. बाजू असलेली चौकडी 3 सें. मी., 4 सें. मी. आणि 5 सें. मी. बाजू असलेल्या चौकडीच्या बेरजेइतकी मोठी असते (आकृती 13) .



आकृती 13

अशाच प्रकारचा दुसरा एखादा संबंध शोधून काढू म्हणजेच $x^3+y^3+z^3=u^3$ हे समीकरण कशा प्रकारे सोडविता येते ते पाहू. तथापि, अज्ञात u ला —t ने संबोधने बरेच सोयीस्कर ठरेल. असे केल्यास या समीकरणाचे स्वरूप पुढीलप्रमाणे असेल :

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

पूर्ण (धन आणि ऋण) संख्यांच्या स्वरूपात हे समीकरण सोडविण्याच्या अनेक मार्गांपैकी एक मार्ग आता विचारात घेऊ. असे समजू की a, b, c, d आणि α, β, γ, δ – हे चार-चार संख्यांचे दोन गट वरील समीकरण पूर्ण करतात. पहिल्या गटातील संख्यांची आणि दुसऱ्या गटातील संख्याची बेरीज करू. तत्पूर्वी दुसऱ्या गटातील संख्यांना एखाद्या k या संख्येने गुणू. k ही संख्या अशा प्रकारे निवडू की प्राप्त होणाऱ्या

$$a+k\alpha,\quad b+k\beta,\quad c+k\gamma,\quad d+k\delta$$

या संख्यादेखील आपल्या समीकरणाची पूर्तता करतील. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास k संख्या अशी निवडू की ज्यामुळे पुढील समानता प्राप्त होईल.

म्हणजेच

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta)^3=0.$$

कंस सोडवून आणि a, b, c, d आणि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ हे गट आपल्या समीकरणाकरता समाधानपूर्ण आहेत म्हणजेच त्यात समानता आहे

म्हणजेच

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0,$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0.$$

असे आपणाला म्हणता येते ही गोष्ट ध्यानात घेता आपणाला पुढील समीकरण मिळते.

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+$$
$$+3c^2k\gamma+3ck^2\gamma^2+3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0.$$

किंवा

$$3k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\delta+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)]=0.$$

वरील गुणाकारातील कोणताही एक गुणक जर शून्य असेल तरच गुणाकाराचे फल 0 होऊ शकेल. प्रत्येक गुणक शून्य आहे असे समजून पाहिल्यास आपणाला k च्या दोन किंमती मिळतात. पहिली किंमत, k=0 आपल्या दृष्टीने महत्त्वाची नाही: याचा अर्थ असा होतो की a, b, c, d या संख्यांमध्ये काहीही न मिळविल्यास मिळणाऱ्या संख्या आपल्या समीकरणाची पूर्तता करतात. म्हणून आपण k ची फक्त दुसरी किंमतच लक्षात घेऊ:

$$k=-\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}.$$

अशा प्रकारे मूळ समीकरणाची पूर्तता करणाऱ्या चार-चार संख्याचे दोन गट ठाऊक असतील तर चार संख्यांचा आणखी एक गट आपणाला जाणून घेता येईल: यासाठी पहिल्या गटातील चार संख्यांची दुसऱ्या गटातील चार संख्यांशी बेरीज करावी लागेल. नंतर त्यांना k ने गुणावे लागेल, जेथे k ची किंमत वरील असेल.

ही पद्धत वापरावयाची असेल तर आपणाला सर्वप्रथम मूळ समीकरणाची पूर्तता करणाऱ्या चार-चार संख्यांचे दोन गट ठाऊक असायला हवेत अशा संख्यांचा एक गट (3, 4, 5, — 6) आपणाला ठाऊक आहेच. आता आणखी एक गट आपणास शोधावयाचा आहे. या मांडणीतून अगदी सोपा मार्ग काढता येईल. दुसऱ्या गटातील 4, — 4 5, 5 या संख्या आपण घेऊ, ज्या मूळ समीकरणासाठी समाधानकारक (पूर्तता) असू शकतील. दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास,

$$a=3,\quad b=4,\quad c=5,\quad e=-6,$$
$$\alpha=r,\ \beta=-r,\ \gamma=s,\ \delta=-s,$$

यावरून k ची खालील किंमत आपणास मिळेल :

$$k=\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2}=\frac{7r+11s}{7r^2-s^2}$$

आणि $a+k\alpha,\ b+k\beta,\ c+k\gamma,\ d=k\delta$ या संख्या अनुक्रमे खालील संख्यांबरोबर असतील :

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2}$$
$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}$$

पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे या चार संख्या आपल्या मूळ समीकरणाची पूर्तता करतात.

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0$$

वरील सर्व किंमतींमध्ये एकच समान छेद असल्यामुळे तो आपणास वगळता येईल. अशा प्रकारे r आणि s ची किंमत कितीही असली तरी खालील संख्या आपल्या मूळ समीकरणाची पूर्तता करतात.

$$x=28r^2+11rs-3s^2,$$
$$y=21r^2+11rs-4s^2,$$
$$z=35r^2+7rs+6s^2,$$
$$t=-42r^2-7rs-5s^2.$$

r आणि s ना निरनिराळ्या पूर्ण किंमती दिल्यास आपणाला आपल्या समीकरणाची अनेक पूर्णांकी उत्तरे मिळू शकतील, जर अशा प्रकारे प्राप्त होणाऱ्या संख्यांचा एकच समान गुणक असेल तर त्याने या संख्यांना पूर्ण भाग जाईल. उदाहरणार्थ, जर $r=1$, $s=1$ असेल तर x, y, z आणि t च्या अनुक्रमे पुढील किंमती मिळतील: 36, 6, 48, —54 किंवा 6 ने भागून 6, 1, 8, —9. अशा रीतीने

$$6^3+1^3+8^3=9^3.$$

अशाच प्रकारच्या पुढील समानता (एकाच समान गुणकाने भाग देऊन) आपण मिळवू शकतो:

$r=1,\ s=2$	$38^3+73^3=17^3+76^3,$
$r=1,\ s=3$	$17^3+55^3=24^3+54^3,$
$r=1,\ s=5$	$4^3+110^3=67^3+101^3,$
$r=1,\ s=4$	$8^3+53^3=29^3+50^3,$
$r=1,\ s=-1$	$7^3+14^3+17^3=20^3,$
$r=1,\ s=-2$	$2^3+16^3=9^3+15^3,$
$r=2,\ s=-1$	$29^3+34^3+44^3=53^3.$

या ठिकाणी एक गोष्ट लक्षात घेणे आवश्यक आहे की जर आपण मूळ गटात 3, 4, 5, —6 किंवा नव्याने प्राप्त झालेल्या गटातील संख्याच्या स्थानांची अदलाबदल करून हीच पद्धत वापरली तर आपणाला चार-चार संख्यांचे नवे गट प्राप्त होतील. उदाहरणार्थ, जर आपण 3, 5, 4, —6 या चार संख्या विचारात घेतल्या (म्हणजेच $a=3$, $b=5$, $c=4$, $d=-6$ अशा किंमती घातल्यास), तर आपणाला x, y, z आणि t च्या पुढील किंमती मिळतील:

$$x=20r^2+10rs-3s^2,$$
$$y=12r^2-10rs-5s^2,$$
$$z=16r^2+8rs+6s^2,$$
$$t=-24r^2-8rs-4s^2.$$

यावरून आपणाला r आणि s च्या निरनिराळ्या किंमतीच्या आधा-रावर पुढील नव्या संख्या प्राप्त होतात :

जर $r=1,\ s=1$ तर $9^3+10^3=1^3+12^3$,
... $r=1,\ s=3$ ... $23^3+94^3=63^3+84^3$,
... $r=1,\ s=5$ ... $5^3+163^3+164^3=206^3$,
... $r=1,\ s=6$ ... $7^3+54^3+57^3=70^3$,
... $r=2,\ s=1$ ... $23^3+97^3+86^3=116^3$,
... $r=1,\ s=-3$ ... $3^3+36^3+37^3=46^3$,

इत्यादी.

कोडे सोडविणाऱ्यास एक लाखाचे बक्षीस

अनिश्चित समीकरणांच्या क्षेत्रातील एका कोड्याला प्रचंड लोक-प्रियता प्राप्त झाली कारण ते कोडे सोडविणाऱ्यास 100,000 जर्मन मार्कचे बक्षीस जाहीर करण्यात आलेले होते!

कोडे असे होते : पुढील तथाकथित सिद्धांत अथवा फेर्माचा "महान नियम" सिद्ध करून दाखवा :

एकच घात असलेल्या दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज कोणत्याही तिसऱ्या संख्येचा तोच घात असू शकत नाही, अपवाद म्हणून फक्त दुसरा घात (वर्ग) होता कारण त्याबाबतीत ही गोष्ट शक्य होती.

दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास हे सिद्ध करून दाखवावयाचे होते की

$$x^n+y^n=z^n$$

हे समीकरण $n>2$ असता पूर्ण संख्येत सोडवता येत नाही.

आपण पाहिलेच आहे की

$$x^2+y^2=z^2$$
$$x^3+y^3+z^3=t^3$$

ही समीकरणे अनेक पद्धतींनी सोडविता येतात. परंतु $x^3 + y^3 = z^3$ ही समानता सिद्ध करून दर्शविणाऱ्या तीन पूर्ण धन संख्या शोधून काढावयाचा प्रयत्न करा, आपले सारे प्रयत्न व्यर्थ ठरतील.

चौथ्या, पाचव्या, सहाव्या इ. घातांच्या बाबतीतही आपले प्रयत्न निष्फळ ठरणार आहेत. फेर्माचा हाच ठाम दावा आहे.

एका लाखाचे बक्षीस मिळवू इच्छिणाऱ्यांना काय करावे लागणार आहे? त्यांना हे दाखवून द्यावयाचे आहे की या घातांच्या बाबतीत वरील स्थिती ($x^n + y^n = z^n$) शक्य आहे. वस्तुस्थिती अशी आहे की फेर्माचा सिद्धांत अद्यापी सिद्ध करून दाखविण्यात आलेला नाही व अद्यापीही तो हवेत लोंबकळत आहे.

हा सिद्धांत मांडलेल्या गोष्टीस आज तीनशे वर्षे लोटली आहेत तथापि गणितज्ञांना हा दावा सिद्ध करून दाखविता आलेला नाही.

अनेक विख्यात गणितज्ञांनी या समस्येवर बराच काळ काम केले तथापि फक्त काही बाबतीतच त्यांना यश लाभले. किंबहुना हा सिद्धांत संपूर्णपणे खरा असल्याचे दाखवून देणे आवश्यक आहे.

कुतूहलाची गोष्ट अशी की फेर्माचा सिद्धांत खरा असल्याचे एकदा जवळजवळ सिद्ध करून दाखविण्यात आले होते परंतु पुन्हा याबाबतीत काहीच ऐकावयास मिळाले नाही. या सिद्धांताच्या जनकाने, 17 व्या शतकातील महान गणितज्ञ प्येर फेर्माने* असे प्रतिपादन केले होते की हा सिद्धांत कसा सिद्ध करावयाचा ते त्याला ठाऊक होते. डिओफॅन्टोच्या निबंधांवर टिपांच्या स्वरूपात त्याने आपला हा सिद्धांत व संख्या विज्ञानातील इतर अनेक सिद्धांत मांडले होते:

---

*खरे पाहता फेर्मा (1603—1665) हा काही व्यावसायिक गणितज्ञ नव्हता. त्याने कायद्याचा अभ्यास केला होता व सल्लागार म्हणून राज्ययंत्रणेत काम पहात होता. त्याला गणिताचा केवळ छंदच होता असे म्हणावे लागेल. त्याने अनेक गणिती शोध लावले, परंतु त्या वेळेच्या पद्धतीनुसार ते प्रसिद्ध झाले नाहीत तर फेर्माने पास्कल, देकार्त, ह्यूगेन्स या आपल्या शास्त्रज्ञ मित्रांना लिहिलेल्या पत्रामधून याविषयी माहिती दिली होती.

“हा सिद्धांत कसा सिद्ध करून दाखवता येईल ते मला उमगले आहे परंतु जागेअभावी त्याविषयी मी या ठिकाणी काहीच लिहू शकत नाही”, असे त्याने एके ठिकाणी लिहिले आहे. त्यानंतर कोणत्याही, कागदावर, पुस्तकात, पत्रात या सिद्धांताविषयी काहीच उल्लेख आढळला नाही.

फेर्माच्या वारसदार गणितज्ञांना या सिद्धांताच्या सोडवणुकीच्या दिशेने स्वतःचाच मार्ग निवडावा लागला.

एईलर (1779) या शास्त्रज्ञाने तिसऱ्या आणि चौथ्या घातासंबंधी, लिजांडर (1823) ने पाचव्या तर लामे आणि लेबेगने सातव्या घातांच्या बाबतीत हा सिद्धांत खरा असल्याचे दाखवून दिले. 1849 साली कुम्मेर याने अनेक घातांच्या बाबतीत या सिद्धांताची सत्यता पटवून दिली. या ठिकाणी त्याने जवळ जवळ शंभरपर्यंत घात विचारात घेतले होते. फेर्माच्या काळात ज्ञात असलेल्या गणिताच्या क्षेत्राची मर्यादा या समस्येने केव्हाच ओलांडली होती.

सहावा गणिती संस्कार

सहावा संस्कार

बेरीज आणि गुणाकार या क्रियांना प्रत्येकी एक प्रतिक्रिया आहेत – वजाबाकी आणि भागाकार. पाचव्या गणिती क्रियेस – घातकरणास दोन प्रतिक्रिया आहेत : मूळ आणि आधारांक शोधणे. मूळ अंक शोधून काढणे ही झाली सहावी क्रिया – सहावा गणिती संस्कार. आधारांक शोधण्याच्या क्रियेस लॉगरिथम काढणे असे म्हणतात. बेरीज आणि गुणाकार या क्रियांना प्रत्येकी एकेकच प्रतिक्रिया असते तर घातकरणाला दोन प्रतिक्रिया असतात. या मागील कारण साधे आहे : पहिल्या दोन क्रियांच्या बाबतीत (बेरीज आणि गुणाकार) दोन्ही संख्यांना समान "अधिकार" असतात, म्हणजेच त्यांच्या स्थानांची सहज अदलाबदल करता येते. तथापि, घातकरणाच्या क्रियेमध्ये भाग घेणाऱ्या संख्यांच्या (म्हणजे मुलांक आणि घातांक) बाबतीत याउलट परिस्थिती असते ; त्यांना समान "अधिकार" नसतो, त्यांच्या स्थानांची अदलाबदल करता येत नाही (उदाहरणार्थ $3^5 \neq 5^3$). म्हणूनच, बेरीज आणि गुणाकार या क्रियांमध्ये भाग घेणाऱ्या प्रत्येक संख्येचा शोध फक्त एकाच पद्धती-च्या साहाय्याने घेता येतो. तर घातकरणामध्ये भाग घेणाऱ्या संख्यांचा मुलांक आणि घातांकाचा शोध निरनिराळ्या मार्गांनी घेता येतो.

सहावी क्रिया करणी (मूळ शोधण्याची क्रिया) $\sqrt{\ }$ या चिन्हाने दर्शविली जाते. परंतु आपणास ठाऊकच आहे की हे करणी चिन्ह r या लॅटिन अक्षरापासून निर्माण झाले आहे. "मूळ" या अर्थी असलेल्या लॅटिन शब्दाचे हे अद्याक्षर आहे. अशी एक वेळ होती (सोळावे शतक) की जेव्हा हे करणी-चिन्ह वापरले जात नव्हते तर त्याऐवजी R हे अक्षर लिहिले जाई व त्यानंतर "वर्ग" किंवा "घन" या अर्थी असले-

या लॅटिन शब्दांची अनुक्रमे q व c ही अद्याक्षरे लिहिली जात असत. यावरून एखाद्या संख्येचे कोणते मूळ काढावयाचे आहे हे समजत असे. उदाहरणार्थ: आजच्या $\sqrt{4352}$ या पद्धतीऐवजी R. q. 4352 अशा प्रकारे लिहिले जाई.

या ठिकाणी आणखी एका गोष्टीचा उल्लेख करावा लागेल की त्या काळी आज वापरात असलेल्या बेरीज व वजाबाकीच्या चिन्हांऐवजी p. आणि m. ही अक्षरे वापरली जात. आजच्या कंसांच्या ऐवजी ⌊ ⌋ ही चिन्हे वापरली जात. त्या काळी व्यक्त केली जाणारी बीजगणितातील पदावली आजच्या "आधुनिक" डोळ्यांना किती विचित्र वाटेल याची कल्पना करा.

प्राचीन गणितज्ञ बम्बेली (1572) यांच्या पुस्तकातील एक पदावली उदाहरणादाखल घेऊ:

R. c. ⌊ R.q. 4352 p. 16 ⌋ m. R. c. ⌊ Rq. 4352 m. 16 ⌋.

आजच्या चिन्हांचा वापर करता आपणाला ही पदावली पुढील प्रकारे लिहिता येईल:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}\,.$$

आज $\sqrt[n]{a}$ ही पदावली दुसऱ्या एका पद्धतीने व्यक्त केली जाते: $a^{\frac{1}{n}}$ या ठिकाणी $\frac{1}{n}$ हा घातांक समजला जातो. ही पद्धत फारच सोयीस्कर ठरते. हॉलंडच्या स्टेवीन या गणितज्ञाने सोळाव्या शतकात ही पद्धती अंमलात आणली.

कोणती संख्या मोठी?

प्रश्न १:

$\sqrt[5]{5}$ आणि $\sqrt{2}$ यापैकी कोणती संख्या मोठी? मूळसंख्येची किंमत न काढता हे आणि या नंतरची कोडी सोडवावयाची आहेत.

उत्तर :

दोन्ही पदांचा 10 वा घात घ्यावयाचे ठरविल्यास :

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25,$$
$$(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32;$$

या किंमती प्राप्त होतील. ज्या अर्थी $32 > 25$ त्या अर्थी

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

प्रश्न २ :

$\sqrt[7]{4}$ आणि $\sqrt[4]{7}$ यापैकी मोठी संख्या कोणती ?

उत्तर :

दोन्ही संख्यांचा 28 वा घात घेऊ.

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \times 2^7 = 128^2$$
$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49^2$$

ज्या अर्थी $128 > 49$ त्या अर्थी

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

प्रश्न ३ :

$\sqrt{7} + \sqrt{10}$ आणि $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ यापैकी कोणती बेरीज मोठी आहे ?

उत्तर :

दोन्ही एकत्रित संख्यांचा वर्ग घेतल्यास :

$$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2=17+2\sqrt{70},$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2=22+2\sqrt{57}.$$

दोन्ही पदावलीमधून 17 वजा केल्यास :

$$2\sqrt{70} \text{ आणि } 5+2\sqrt{57}$$

आता या पदांचा वर्ग करू :

$$280 \text{ आणि } 253+20\sqrt{57}.$$

दोन्ही संख्यांमधून 253 वजा केले असता :

$$27 \text{ आणि } 20\sqrt{57}.$$

ज्या अर्थी $\sqrt{57}$ ही संख्या 2 पेक्षा मोठी आहे त्या अर्थी $20\sqrt{57}>40$, परिणामी :

$$\sqrt{3}+\sqrt{9}>\sqrt{7}+\sqrt{10}$$

एका दृष्टिक्षेपात कोडी सोडविणे

प्रश्न :

$$x^{x^3}=3$$

या समीकरणाकडे लक्षपूर्वक एक दृष्टिक्षेप टाका आणि x ची किंमत किती आहे ते सांगा.

उत्तर :

ज्याला बीजगणितामधील चिन्हांची चांगली माहिती आहे त्याच्या चट्कन ध्यानात येईल की

$$x=\sqrt[3]{3}.$$

खरे पाहता,

$$x^3=(\sqrt[3]{3})^3=3,$$

आणि परिणामी,

$$x^{x^3}=x^3=3.$$

ज्यांना हे कोडे एका दृष्टिक्षेपात सोडविता येत नाही ते पुढील प्रकारे हे कोडे सोडवू शकतात :

समजा

$$x^3=y$$

म्हणजे

$$x=\sqrt[3]{y},$$

आणि मग कोड्याचे स्वरूप असे होईल :

$$(\sqrt[3]{y})^y=3,$$

किंवा तिसरा घात घेतल्यास

$$y^y=3^3.$$

यावरून हे स्पष्ट होते की $y=3$ आणि परिणामी

$$x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{3}.$$

बीजगणिती हास्य

प्रश्न १ :

$2\times2=5$, $2=3$ इत्यादी विषयांवर खरेखुरे बीजगणिती नाटच (अर्थात विनोदी) उभे करता येणे शक्य आहे. या नाटचाची खरी

[illegible]क आहे घातकरण क्रिया. या साऱ्या नाटयाची मेख अशा गोष्टीत आहे की एक साधी चूक अशा प्रकारे लपून राहिलेली आहे की मुळी नजरेसच येत नाही असे म्हटले तरी चालेल. आता आपण वरील दोन नाटयपेच पाहूं.

नाटय पहिले :

$$2=3.$$

रंगमंचावर सर्वप्रथम पुढील समानता येते की ज्याविषयी कोणालाच काहीही शंका नाही,

$$4-10=9-15.$$

त्यानंतर रंगमंचावर दोन्ही बाजूस समान मूल्य $6\frac{1}{4}$:

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}$$

त्यानंतर मात्र या नाटचामध्ये पुनर्रचनांचे वर्चस्व निर्माण होते :

$$2^2-2\times2\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\times3\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

दोन्ही बाजूंकडील राशींची वर्गमुळे घेतल्यास :

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

दोन्ही बाजूस $\frac{5}{2}$ मिळविल्यास आपणास पुढील समतुल्य समीकरण मिळते :

$$2=3.$$

आता चूक कोठे आहे ?

उत्तर :

चूक लपली आहे ती पुढील समीकरणात :

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

या समीकरणावरूनच आपण खालील निष्कर्ष काढला होता :

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

परंतु एक गोष्ट या ठिकाणी ध्यानात घेतली गेलेली नाही की दोन संख्यांचा धातू जरी समान असला तरीही मूळ संख्यादेखील समान असते असे आपणास म्हणता येणार नाही. उदा. $(-5)^2=5^2$ जरी असले तरी $-5\neq5$. मूळ संख्यांची चिन्हे ($-$ किंवा $+$) जरी असमान असली तरी त्यांचे वर्ग समान असू शकतात. यावरील उदाहरणामध्ये अगदी हीच परिस्थिती आढळून येते :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

परंतु

$$-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$$

प्रश्न २ :

दुसरे बीजगणिती नाटय :

$$2\times2=5$$

देखील या पूर्वीच्या नाटयाच्या धर्तीवरच आहे. रंगमंचावर नैसर्गिक समतुल्य समीकरण येते :

$$16-36=25-45$$

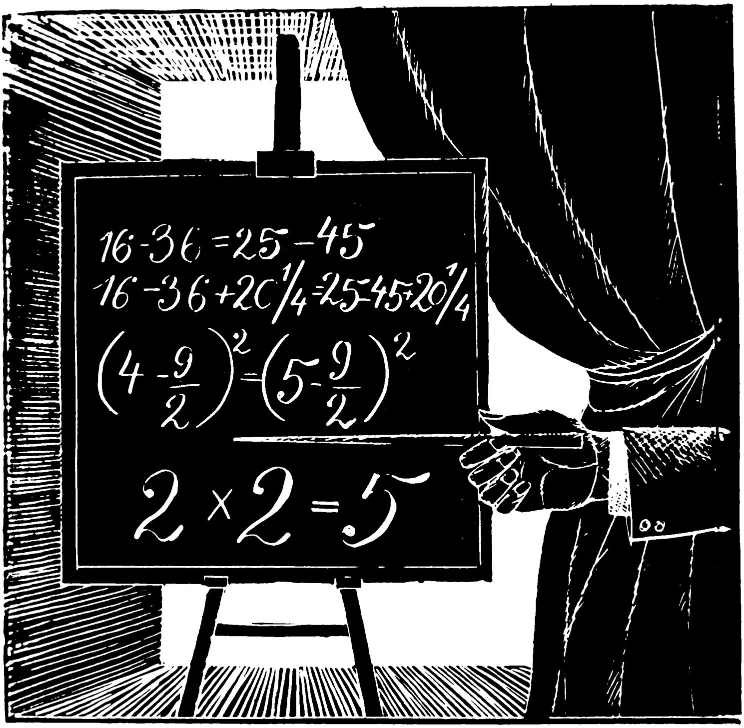
त्यामध्ये समान संख्या मिळविल्या जातात :

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}$$

आणि त्यानंतर पुढील पुनर्रचना केल्या जातात :

$$4^2-2\times4\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\times5\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$



आकृती 14

पूर्वीप्रमाणेच या राशींचे वर्गमूळ घेतल्यास :

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

$$4=5,$$

म्हणजेच $2\times2=5$.

गणितशास्त्राच्या अनुभवी विद्यार्थ्यांच्या नजरेतून मात्र वरील चुका सुटणार नाहीत याची खात्री बाळगता येईल.

प्रकरण 6

वर्गसमीकरणे

हस्तांदोलने

प्रश्न :

एका बैठकीच्या वेळी झालेल्या एकूण हस्तांदोलनांची संख्या एका व्यक्तीने मोजली होती. एकूण संख्या होती 66. बैठकीमध्ये किती लोकांनी भाग घेतला होता?

उत्तर :

बीजगणिताच्या साहाय्याने हे कोडे सहजगत्या सोडविता येते. बैठकीमध्ये भाग घेतलेल्या x व्यक्तींपैकी प्रत्येकाने $x-1$ इतके हात हाती घेतले. याचा अर्थ एकूण हस्तांदोलनांची संख्या $x(x-1)$ व्हावयास हवी, परंतु एक गोष्ट ध्यानात घ्यावयास हवी की जेव्हा इवानोव पित्रोवशी हस्तांदोलन करतो तेव्हा पित्रोवदेखील इवानोवचा हात आपल्या हाती घेतो, म्हणून ही दोन हस्तांदोलने न समजता एकच समजले पाहिजे. म्हणजेच हस्तांदोलनांची एकूण संख्या वर पहिलेल्या संख्येच्या निम्मी असावयास हवी. यावरून आपणाला पुढील समीकरण मिळते :

$$\frac{x(x-1)}{2}=66$$

किंवा पुनर्रचना केल्यास,

$$x^2-x-132=0,$$

ज्यावरून :

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2},$$

$$x_1=12, \qquad x_2=-11.$$

ज्या अर्थी बैठकीमध्ये भाग घेतलेल्यांची संख्या ऋण असू शकणार नाही त्या अर्थी $x_1=12$ हे उत्तरच बरोबर ठरते. बैठकीत एकूण 12 लोकांनी भाग घेतला होता.

मधमाशांचे पोळे

प्रश्न :

प्राचीनकालीन भारतामध्ये एक प्रकारचा खेळ अस्तित्वात होता. जाहीररित्या कोडी सोडविण्याची स्पर्धा आयोजित केली जात असे. अशा या स्पर्धांमधील कोडी सोडविण्याच्या ध्येयानेच त्या काळची गणिताची पुस्तके लिहिली जात असत. अशाच प्रकारच्या एका पाठ्यपुस्तकात लिहिले आहे. "या ठिकाणी नमूद केलेल्या नियमांच्या आधारावर हुशार व्यक्ती हजारो कोडी रचू शकते. ज्याप्रमाणे सूर्यदेव आपल्या तेजाने ताऱ्यांवर मात करतो त्याचप्रमाणे बुद्धिमान व्यक्ती बीजगणितातील कोडी इतरांना घालून अथवा सोडवून इतरांच्या बुद्धीवर मात करू शकेल." मूळ पुस्तकामध्ये अर्थात ही गोष्ट काव्यरूपात लिहिली गेलेली आहे कारण पूर्ण पुस्तकच मुळी आहे काव्यरूपात: या पुस्तकातील एका काव्यमय कोड्याचा आपण गद्यात अनुवाद करू.

एका मधाच्या पोळयातील एकूण मधमाशांच्या निम्म्या संख्येच्या वर्गमुळाइतक्या मधमाशा जास्वंदीच्या झाडांवर बसल्या. यामुळे $\frac{8}{9}$ पोळे रिकामे राहिले होते. याच पोळयातील एक मधमाशी आपली मैत्रीण अडकून पडलेल्या एका कमळाभोवती घिरट्या घालत इतरांना मदतीसाठी बोलावित होती, तर या पोळयातील मधमाशांची एकूण संख्या काय होती?

उत्तर :

पोळयातील मधमाशांची एकूण संख्या x आहे असे समजू म्हणजे आपणास पुढील समीकरण प्राप्त होईल:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

जर $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ असे समजल्यास आपणाला वरील समीकरणाला अधिक सोपे स्वरूप आणता येईल.

आता $x=2y^2$ आणि समीकरणाचे स्वरूप असेल :

$$y+\frac{16y^2}{9}+2=2y^2,$$

$$\text{आणि } 2y^2-9y-18=0.$$

हे समीकरण सोडविल्यास आपणाला y च्या दोन किंमती प्राप्त होतात :

$$y_1=6, \qquad y_2=-\frac{3}{2}.$$

यावरून आपणाला x च्या किंमती काढता येतात :

$$x_1=72, \qquad x_2=4.5.$$

ज्या अर्थी मधमांशांची संख्या पूर्ण आणि धनच असू शकते त्या अर्थी $x=72$ हे आपले उत्तरच बरोबर ठरू शकते. आपले हे उत्तर आता तपासून पाहू :

$$\sqrt{\frac{72}{2}}+\frac{8}{9}\times72+2=6+64+2=72.$$

माकडांचा थवा

प्रश्न :

माकडांच्या एका थव्याची दोन गटात विभागणी झाली. एका गटात कळपातील माकडांच्या एकूण संख्येच्या 8 व्या भागाच्या वर्गाइतकी माकडे होती तर दुसऱ्या गटात एकूण 12 माकडे होती तर कळपातील माकडांची एकूण संख्या काय? *

* मूळ पुस्तकामध्ये, पद्यांमध्ये लिहिलेले हे कोडे या ठिकाणी गद्यात रूपांतरीत करण्यात आलेले आहे.



आकृती 15

उत्तर :

कळपातील माकडांची एकूण संख्या x आहे असे समजल्यास

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x,$$

ज्यावरून

$$x_1=48, \qquad x_2=16.$$

या कोड्याच्या उत्तराच्या स्वरूपात आपणाला दोन धन संख्या प्राप्त होतात : 48 आणि 16. या दोन्ही संख्या यशस्वीरित्या कोड्याची सोडवणूक करतात – कळपामध्ये 48 किंवा 16 माकडे होती.

समीकरणांची दृष्टी

आतापर्यंत आपण पाहिलेल्या समीकरणांमध्ये आपणाला दोन उत्तरे मिळतात. कोड्यातील एकंदरीत परिस्थितीवर (प्रत्यक्ष परिस्थितीवर) योग्य उत्तर अवलंबून असते. पहिल्या कोड्यात उत्तरादाखल आपणाला ऋण तर दुसऱ्या कोड्यात अपूर्णांकी संख्या प्राप्त झाल्या ज्या आपल्या कोड्यांच्या उत्तरांशी पूर्णपणे विसंगत होत्या. तिसऱ्या कोड्यामध्ये आपणाला दोन्ही योग्य उत्तरे प्राप्त झाली. दुसरे उत्तर कोडे सोडविणाऱ्याच्या दृष्टीने नव्हे तर खुद्द कोडे घालणाऱ्याच्या बाबतीत देखील अनपेक्षित असते. कधी कधी कोडे घालणाऱ्यापेक्षाही उत्तर अधिक दूर-दृष्टी असलेले असते हे दाखविणारे एक उदाहरण घेऊ.

सेकंदास 25 मीटर वेगाने एक चेंडू वर फेकण्यात आला. किती सेकंदांनी तो चेंडू जमिनीपासून 20 मीटर उंचीवर असेल?

उत्तर :

हवेचा प्रतिकार नसताना वर फेकण्यात आलेल्या वस्तूच्याबाबतीत जमिनीपासून वरच्या दिशेची उंची (h) प्रारंभीचा वेग (v) गुरुत्वाकर्षणाची गती (g) आणि वेळ (t) यांच्या संबंधांचे पुढील समीकरण मांडण्यात येते :

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

या ठिकाणी आपण हवेचा प्रतिकार विचारात घेतलेला नाही कारण इतक्या कमी वेगास होणारा हवेचा प्रतिकार नगण्य असतो. आपला हिशेब सोपा व्हावा यासाठी गुरुत्वाकर्षणाची गती 9.8 मीटरच्या ऐवजी 10 मीटर आहे असे समजू. वरील सूत्रात h, v आणि g च्या किंमती घातल्यास

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

म्हणजेच

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

हे समीकरण सोडविल्यास :

$$t_1=1 \text{ आणि } t_2=4$$

असल्याचे दिसून येईल.

याचा अर्थ जमिनीपासून 20 मीटर उंचीवर चेंडू दोन वेळा असेल : 1 सेकंदानंतर आणि 4 सेकंदानंतर.

हे उत्तर आपणाला थोडेसे चमत्कारिक वाटेल व आपले दुसरे उत्तर (4 सेकंद) ध्यानात घेण्याची आपली तयारीच नसेल. पण असे करणे चुकीचे ठरेल. दुसरे उत्तर काही अर्थशून्य नाही; चेंडू जमिनीपासून 20 मीटर अंतरावर खरोखरीच दोन वेळा येतो : पहिल्यांदा वर जाताना आणि दुसऱ्यांदा खाली, जमिनीच्या दिशेने येताना. आपल्या ध्यानात ही गोष्ट सहज येईल की सेकंदास 25 मीटर या प्रारंभीच्या वेगाने चेंडू 2.5 सेकंद वरच्या दिशेने जायला हवा व त्याने 31.25 मीटर इतकी उंची गाठली पाहिजे. एका सेकंदामध्ये 20 मीटर इतकी उंची गाठून चेंडू आणखी 1.5 सेकंद वर जाईल आणि नंतर तेवढाच वेळ त्याला पुन्हा 20 मीटर उंचीवरील या बिंदूपर्यंत येण्यास लागेल आणि एक सेकंदाने तो जमिनीवर परत येईल.

आईलरचे कोडे

स्टेंडाल आपल्या "आत्मकथे"मध्ये स्वतःच्या शिक्षण कालासंबंधी लिहितो :

"आईलरनी (गणिताचे शिक्षक) घातलेल्या कोडयाने मला बऱ्याच गोष्टींचा उलगडा केला. हे कोडे एका किसानमहिलेने बाजारामध्ये विक्रीसाठी आणलेल्या अंडयांसंबंधी होते. केवळ या वेळी मला कळले की बीजगणितासारखे शस्त्र किती प्रबळ आहे. परंतु दुर्दैवाने पूर्वी मला यासंबंधी कोणीच काहीही सांगितले नव्हते..."

तरुण स्टेंडालच्या मनावर छाप पाडणारे आईलरच्या "प्राथमिक बीजगणित" या पुस्तकातील कोडे असे होते :

दोन किसानमहिलांनी विक्रीसाठी 100 अंडी बाजारात आणली.

एकीकडे दुसरीपेक्षा जास्त अंडी होती. किंबहुना दोघींनाही समान रक्कम मिळाली. पहिली महिला दुसरीस म्हणाली: "जर माझ्याजवळ तुझ्याजवळील अंडी असती तर मला 15 क्रेइत्सर (पैसे) मिळाले असते." दुसरीने उत्तर दिले: "माझ्याजवळ जर तुझ्याजवळची अंडी असली असती तर मला $6\frac{2}{3}$ क्रेइत्सर (पैसे) मिळाले असते." तर प्रत्येकीजवळ किती किती अंडी होती?

उत्तर :

असे समजू की पहिल्या महिलेजवळ x अंडी होती म्हणजे दुसरी-जवळ $100-x$ अंडी असतील. जर पहिल्या महिलेजवळ $100-x$ अंडी असली असती तर, आपणाला ठाऊक आहे की तिला 15 क्रेईत्सर मिळाले असते म्हणजेच पहिल्या महिलेने प्रत्येक अंडे

$$\frac{15}{100-x}$$

या दराने विकले.

अशा प्रकारे दुसऱ्या महिलेने प्रत्येकी

$$6\frac{2}{3}\div x=\frac{20}{3x}$$

या दराने अंडी विकली.

आता प्रत्येक महिलेस प्रत्यक्षात किती पैसे मिळाले ते ठरविता येईल :

$$\text{पहिल्या महिलेस: } x\cdot\frac{15}{100-x}=\frac{15x}{100-x}$$

$$\text{दुसऱ्या महिलेस: } (100-x)\cdot\frac{20}{3x}=\frac{20(100-x)}{3x}\ .$$

इतके पैसे मिळाले.

ज्या अर्थी दोघींनाही समान पैसे मिळाले त्या अर्थी

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}\ .$$

वरील समीकरणाची पुनर्रचना करता :

$$x^2+160x-8\,000=0,$$

ज्यावरून

$$x_1=40, \qquad x_2=-200.$$

या कोड्याचे उत्तर ऋणसंख्येच्या स्वरूपात असू शकत नाही, म्हणून पहिले उत्तर ध्यानात घेतले पाहिजे. याचा अर्थ पहिल्या महिलेजवळ 40 अंडी होती तर दुसरीजवळ 60.

हे कोडे दुसऱ्या एका पद्धतीनेसुद्धा सोडविता येणे शक्य आहे.

असे समजू की दुसऱ्या महिलेजवळ पहिल्या महिलेपेक्षा k पट जास्त अंडी होती. दोघींनाही समान रक्कम मिळाली, याचा अर्थ, पहिल्या महिलेने आपल्या जवळील अंडी दुसरीच्या तुलनेने k पट जास्त किंमतीने विकली. विक्रीपूर्वी जर दोघींनी आपल्या जवळील अंड्यांची अदलाबदल केली असती तर पहिल्या महिलेजवळ दुसरीच्या तुलनेने k पट जास्त अंडी आली असती व तिने k पट जास्त किंमतीने ती विकली असती. याचा अर्थ असा की तिला दुसरीपेक्षा k^2 जास्त पैसे मिळाले असते. परिणामी आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होते:

$$k^2=15\div 6\,\frac{2}{3}=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}\ ;$$

ज्यावरून

$$k=\frac{3}{2}\ .$$

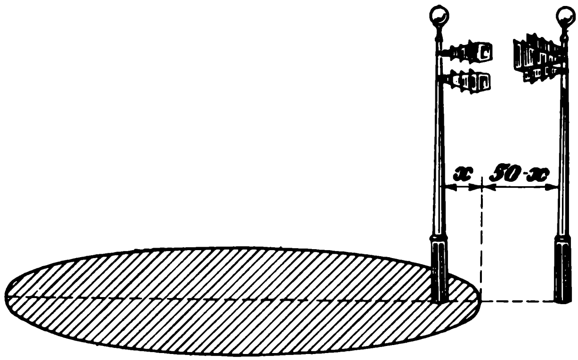
आता कोणत्या महिलेजवळ किती अंडी होती हे जाणून घेण्यासाठी 100 अंड्यांची 3:2 या प्रमाणात विभागणी केली पाहिजे. यावरून आपणाला दिसून येईल की पहिल्या महिलेजवळ 40 तर दुसरीजवळ 60 अंडी होती.

लाऊडस्पीकर

एका मैदानामध्ये 13 लाऊडस्पीकर लावण्यात आलेले असून त्यांची विभागणी दोन गटात करण्यात आलेली आहे: एका गटात 4 तर दुसऱ्या गटात 9 लाऊडस्पीकर आहेत. दोन्ही गटांच्या दरम्यानचे अंतर 50 मीटर आहे. दोन्ही गटांच्या आवाजाची तीव्रता समान असावी यासाठी हे दोन्ही गट कोठे प्रस्थापित करावेत?

उत्तर :

कमी लाऊडस्पीकर असलेल्या गटाचा प्रसरण बिंदू x आहे असे मानल्यास जास्त लाऊडस्पीकर असलेल्या गटापासूनचे त्याचे अंतर 50 — x असेल (आकृती 16 पहा). ध्वनीची तीव्रता अंतराच्या वर्गाशी



आकृती 16

समप्रमाणात असते हे आपणाला ठाऊक आहेच. यावरून आपणाला पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$\frac{4}{9}=\frac{x^2}{(50-x)^2}.$$

या समीकरणाची पुनर्रचना करता :

$$x^2+80x-2\,000=0,$$

हे समीकरण सोडविले असता आपणाला दोन किंमती प्राप्त होतात :

$$x_1=20, \qquad x_2=-100.$$

यापैकी धन संख्या (किंमत) आपणाला हवे असलेले उत्तर देते : चार लाऊडस्पीकर असलेल्या गटापासून 20 मीटर अंतरावर आणि म्हणजेच 9 लाऊडस्पीकर असलेल्या गटापासून 30 मीटर अंतरावर समान तीव्रतेचे ध्वनी ऐकावयास मिळतील.

ऋण किंमत काय दर्शविते ? या किंमतीमध्ये काही अर्थ आहे काय ?

अर्थातच आहे. धन संख्येच्या (किंमतीच्या बाबतीत आपण जो बिंदू निवडला त्याउलट दिशेला दुसरा बिंदू आपणाला निवडता येईल, ज्या ठिकाणी समान तीव्रतेचे ध्वनी आपणास ऐकावयास मिळतील.

चार लाऊडस्पीकर असलेल्या गटापासून 100 मीटर अंतरावर दोन्ही गटांपासून निघणारे ध्वनी समान तीव्रतेने ऐकावयास मिळतील. दोन लाऊडस्पीकर असलेल्या गटापासून $100 + 50 = 150$ मीटर अंतरावर हा बिंदू असेल.

अशा प्रकारे ज्या ठिकाणाहून ध्वनी उत्पन्न होतो त्या दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेवर, सरळ रेषेवर हे ध्वनी समान तीव्रतेने ऐकावयास मिळतील असे दोन बिंदू आपण शोधून काढले. या सरळ रेषेवर अशा प्रकारचे इतर बिंदू नाहीत, पण या रेषेबाहेर मात्र असे बिंदू आहेत.

चंद्राच्या हालचालीचे बीजगणित

लाऊडस्पीकरच्या दोन गटांपासून निघणारे ध्वनी समान तीव्रतेने ज्या ठिकाणी ऐकू येतील ते बिंदू आपण ज्याप्रमाणे शोधून काढले, त्याचप्रमाणे अंतरिक्ष अग्निबाणावर पृथ्वी आणि चंद्राचे समान गुरुत्वाकर्षण ज्या ठिकाणी असतील असे बिंदू आपणाला शोधून काढता येतील.

न्यूटनच्या नियमानुसार प्रत्येक कण दुसऱ्या कणाला आकर्षित करीत असतो. हा आकर्षकप्रेरक, त्या कणातील वस्तुमानांच्या गुणाकाराशी समप्रमाणात आणि दोहोमधल्या अंतराच्या वर्गाशी व्यस्त प्रमाणात असतो. जर पृथ्वीचे वस्तुमान M व अग्निबाण आणि पृथ्वीच्या दरम्यानचे अंतर x आहे असे मानले तर अग्निबाणाच्या प्रत्येक ग्रॅम वस्तुमानाला आकर्षित करणारे पृथ्वीचे बल असेल

$$\frac{Mk}{x^2},$$

जेथे k एक ग्रॅम वस्तुमानाचे 1 सें. मी. अंतरावर असलेल्या एक ग्रॅम वस्तुमानावर असलेले परस्पर आकर्षण बल.

याच बिंदूवर चंद्राचे अग्निबाणाच्या प्रत्येक ग्रॅम वस्तुमानावर कार्य करीत असलेले आकर्षण बल असेल

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

जेथे m — चंद्राचे वस्तुमान आणि l — त्याचे पृथ्वीपासूनचे असलेले अंतर (या ठिकाणी अग्निबाण पृथ्वी आणि चंद्राच्या केंद्रबिंदूना जोडणाऱ्या सरळ रेषेवर आहे असे मानण्यात येत आहे). आपल्याला पुढील समीकरण सिद्ध करावयाचे आहे :

$$\frac{Mk}{x^2}=\frac{mk}{(l-x)^2}$$

किंवा

$$\frac{M}{m}=\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}.$$

आपणाला ठाऊक आहे की खगोलशास्त्राच्या नियमानुसार $\frac{M}{m}$ या राशीची किंमत जवळजवळ 81.5 आहे. ही किंमत वरील समीकरणात घातल्यास

$$\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}=81.5.$$

ज्यावरून

$$80.5\,x^2-163.0\,lx+81.5\,l^2=0.$$

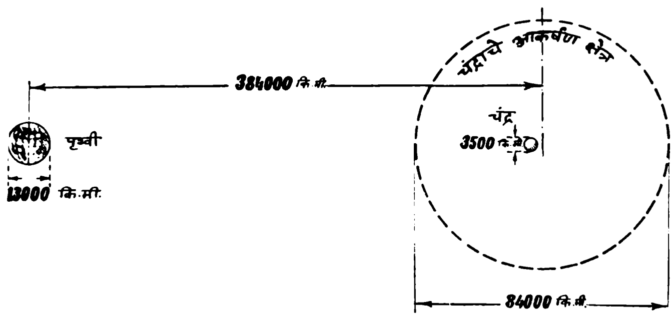
हे समीकरण सोडविल्यास x च्या पुढील किंमती प्राप्त होतात :

$$x_1=0.9\,l, \qquad x_2=1.12\,l.$$

यापूर्वी आपण पाहिलेल्या लाऊडस्पीकर संबंधित कोड्याप्रमाणेच आपणाला असा निष्कर्ष काढता येईल की पृथ्वी आणि चंद्र यांच्या दरम्यानच्या रेषेवर ज्या ठिकाणी दोन्ही ग्रहांचे समान आकर्षण अग्निबाणावर असेल असे आपणाला हवे असलेले दोन बिंदू आहेत. पहिला बिंदू असेल पृथ्वीच्या मध्यापासून 0.9 अंतरावर तर दुसरा 1.12 अंतरावर. ज्या अर्थी पृथ्वी आणि चंद्र यांच्या दरम्यानचे l हे अंतर $\approx$384 000 कि. मी. इतके आहे त्या अर्थी एक बिंदू पृथ्वीच्या

मध्यापासून 346 000 कि. मी. अंतरावर असेल तर दुसरा — 430 000 कि. मी. अंतरावर.

परंतु आपणाला ठाऊक आहे की व्यासाच्या दोन टोकांच्या स्वरूपात असलेल्या या बिंदूमधून जाणाऱ्या वर्तुळावरील सर्व बिंदूंचे हे वैशिष्टच असेल. पृथ्वी आणि चंद्र यांचे मध्यबिंदू जोडणाऱ्या रेषेजवळ जर हे वर्तुळ फिरविण्यात आले तर एक गोलाकार पृष्ठभागाची आकृती रेखाटली जाईल व यावरील सर्व बिंदू या कोड्यातील अटीची पूर्तता करतील.



आकृती 17

या तथाकथित चंद्राच्या आकर्षण क्षेत्राचा, गोलाचा व्यास असेल

$$1.12\,l - 0.9l = 0.22\,l \approx 84\,000 \text{ कि. मी.}$$

अशी एक चुकीची समजूत आहे की चंद्रावर अग्निबाण पडण्यासाठी तो फक्त त्याच्या आकर्षण क्षेत्रात पोहोचावयास हवा. सकृतदर्शनी असे वाटते की जर अग्निबाण चंद्राच्या आकर्षण क्षेत्रात प्रवेश करेल तर तो कोणत्याही परिस्थितीत चंद्राच्या पृष्ठभागावरच पडेल कारण या क्षेत्रामध्ये चंद्राचे आकर्षण पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणापेक्षा जास्त असेल. जर असे असते तर चांद्रप्रवासाची समस्या अगदीच सुलभ झाली असती कारण आपणाला अग्निबाण, ज्याचा व्यास आकाशात $\frac{1}{2}$ अंशाच्या कोनातून दिसतो त्या खुद्द चंद्राच्या दिशेने धाडावा लागला नसता तर 12 अंशाच्या कोनातून दिसणाऱ्या 84 000 कि. मी. व्यास असणाऱ्या गोलाच्या दिशेने तो सोडणेच पुरेसे झाले असते.

तथापि अशा प्रकारची गैरसमजूत चुकीची आहे हे दाखवून देणे अवघड नाही.

असे समजू की पृथ्वीवरून धाडण्यात आलेला अग्निबाण अखंडपणे आपला वेग पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणाच्या परिणामी गमावित चंद्राच्या आकर्षण क्षेत्रात शून्य वेगाने प्रवेश करता झाला. आता तो चंद्रावर पडेल काय? मुळीच नाही!

पहिली गोष्ट म्हणजे चंद्राच्या आकर्षण क्षेत्रात पृथ्वीचे गुरुत्वाकर्षण कार्य करीत असते. म्हणून पृथ्वी आणि चंद्र यांना जोडणाऱ्या रेषेपासून बाजूवर चंद्राची आकर्षण शक्ती पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणावर केवळ मातच करीत नाही तर प्रेरकांच्या समांतरभुज चौकोनाच्या नियमानुसार या दोन्ही शक्तींची बेरीज होते आणि चंद्राच्या दिशेने मुळीच नसलेल्या दिशेने आपणाला समान प्रेरक-फल असलेली शक्ती प्राप्त झालेली दिसून येते (फक्त पृथ्वी-चंद्र या रेषेवरच या प्रेरणेची दिशा चंद्राच्या केंद्र-बिंदूच्या दिशेने असेल).

दुसरी आणि अत्यंत महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे खुद्द चंद्र हे एक अस्थिर 'लक्ष्य' नाही आणि त्याच्या सापेक्ष अग्निबाणाची हालचाल कशी असेल (तो चंद्रावर पडणार तर नाही ना!) हे जर आपणाला जाणून घ्यावयाचे असेल तर चंद्राच्या सापेक्ष अग्निबाणांचा वेग लक्षात घेणे आवश्यक आहे. आणि खुद्द चंद्र सेकंदास एक कि. मी. वेगाने पृथ्वीभोवती भ्रमण करीत असल्यामुळे हा वेग शून्य असूच शकणार नाही. म्हणून चंद्राच्या सापेक्ष अग्निबाणाचा वेग चंद्राला आपल्या दिशेने अग्निबाण खेचून घेण्याच्या किंवा निदान कृत्रिम उपग्रहाच्या स्वरूपात त्याला आपल्या कक्षेत "पकडून" ठेवण्याच्या दृष्टीने खूपच जास्त असेल.

वस्तुतः चंद्राच्या आकर्षण क्षेत्रानजिक येत असतानाच चंद्राची आकर्षण शक्ती अग्निबाणाच्या गतीवर महत्त्वपूर्ण परिणाम घडवून आणते. 6600 कि. मी. व्यास असलेल्या तथाकथित "चंद्राच्या कार्य क्षेत्रात" प्रवेश केलेल्या क्षणापासून चंद्राची आकर्षण शक्ती कार्य करू लागते असे मानले जाते. अशा वेळी चंद्राच्या सापेक्ष अग्निबाणाची हालचाल पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणाकडे संपूर्णपणे दुर्लक्ष करून विचारात घेतली तरी चालते, परंतु ज्या वेगाने अग्निबाण या क्षेत्रात प्रवेश करतो

ना वेग (चंद्राच्या सापेक्ष) अचूकपणे ध्यानात घेतला पाहिजे. याचे कारण असे की "चंद्राच्या कार्यक्षेत्रात" प्रवेश करते वेळी अग्निबाणाचा वेग (चंद्राच्या सापेक्ष) सरळ चंद्राच्या दिशेने असेल अशा रीतीने अग्निबाण चंद्राच्या दिशेने धाडावा लागेल. यासाठी "चंद्राच्या कार्य यात्रा"ने चंद्राच्या "भेटी"स निघालेल्या अग्निबाणाच्या दिशेने धाव घेतली पाहिजे. एकंदरीत चंद्रावर उतरणे किंवा "पडणे" हे काही इतके साधेसोपे काम नव्हे, 8400 कि. मी. व्यासाच्या गोळ्यावर पडणे तर नव्हेच नव्हे.

एक अवघड कोडे

बोगदानोव-बेलस्की यांच्या "एक अवघड कोडे" या चित्राविषयी अनेकांना माहिती असेल. परंतु या चित्रामध्ये व्यक्त करण्यात आलेले अवघड कोडे फारच कमी लोकांच्या ध्यानात आले असावे. हे कोडे असे आहे: केवळ तोंडी हिशेबाने खालील गणिताचे उत्तर चट्कन सांगायचे :

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

हे कोडे खरोखरच तितके सोपे नाही. तथापि एका शिक्षकाच्या विद्यार्थ्यांनी मात्र ते सोडविले. हे शिक्षक आहेत प्रो. सी. ए. रचिन-स्की. ग्रामीण भागातील शाळेमध्ये एक शिक्षक बनण्याच्या हेतूने त्यांनी विश्वविद्यापीठातील आपली जागा सोडली. खेडेगावातील आपल्या शाळेमध्ये त्यांनी संख्यांच्या गुणधर्मांचा उत्कृष्ठ प्रकारे वापर करून तोंडी हिशेब कसे सोडवावेत हे शिकवले. 10, 11, 12, 13 आणि 14 या संख्यांची अगदी खास अशी आश्चर्यजनक वैशिष्ट्ये आहेत :

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

ज्या अर्थी $100+121+144=365$, त्या अर्थी आपल्या सहज ध्यानात येईल की घालण्यात आलेल्या गणिताचे उत्तर आहे 2.

काही संख्यांना प्राप्त असलेल्या अशा प्रकारच्या गुणवैशिष्टयांना अधिक व्यापक स्वरूप देण्याचे साधन आपणाला बीजगणिताद्वारे प्राप्त होते : या ओळीने येणाऱ्या पाच संख्यातील पहिल्या तीन संख्यांच्या वर्गांची बेरीज पुढील दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतकी आहे ही गोष्ट एकमेव आहे असे म्हणता येईल काय ?

उत्तर :

आपण शोधत असलेल्या संख्यांपैकी पहिली संख्या x आहे असे मानू ; म्हणजे या संख्या पुढील स्वरूपात आढळून येतील :

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2.$$

तसे पाहिल्यास पहिली नव्हे तर दुसरी संख्या x आहे असे मानने अधिक सोयीस्कर ठरेल. अशा प्रकारे आपले समीकरण असेल :

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2$$

कंस सोडवून :

$$x^2-10x-11=0,$$

त्या अर्थी

$$x=5\pm\sqrt{25+11},$$
$$x_1=11, \qquad x_2=-1.$$

परिणामतः आपणाला वरील गुणधर्म असलेल्या पुढील संख्या मिळतात :

रचिनस्की यांच्या

10, 11, 12, 13, 14

प्रत्यक्षात

$$(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2.$$

कोणत्या संख्या?

प्रश्न :

ओळीने येणाऱ्या अशा तीन संख्या शोधून काढावयाच्या आहेत की ज्यापैकी मधल्या संख्येचा वर्ग इतर दोन संख्यांच्या गुणाकारापेक्षा 1 ने मोठा असेल.

उत्तर :

आपणाला हव्या असलेल्या संख्यांपैकी पहिली संख्या x आहे असे मानल्यास पुढील समीकरण प्राप्त होईल :

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1.$$

कंस सोडविल्यास :

$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1,$$

ज्या अर्थी आपणाला x ची किंमत काढता येत नाही. त्या अर्थी असे दिसून येते की आपण मांडलेले समीकरण एकरूप आहे. या समीकरणातील अक्षराला कोणतीही किंमत दिली तरी ते एकरूप असते. इतर समीकरणांमध्ये फक्त ठरविक किंमत दिल्यानंतरच ते समीकरण एकरूप होते. याचा अर्थ असा की एका ओळीने येणाऱ्या कोणत्याही तीन संख्यांच्या बाबतीत आपणाला वरील आश्चर्यजनक गुणधर्म पहावयास मिळेल. उदाहरणादाखल 17, 18 व 19 या संख्या घेऊ. आपणाला दिसून येते की :

$$18^2 - 17 \times 19 = 324 - 323 = 1.$$

जर मधली संख्या x आहे असे मानल्यास वरील समीकरणाचे स्वरूप अगदी चांगल्या प्रकारे स्पष्ट होते :

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

प्रकरण 7

कमाल आणि किमान किंमती

या प्रकरणामध्ये मांडण्यात आलेली कोडी कमाल आणि किमान किंमती शोधून काढणाऱ्या अत्यंत मनोरंजक कोड्यांपैकीच आहेत. अर्थात या कोड्यांची सोडवणूक विभिन्न मार्गांनी करता येते. अशाच पैकी एक मार्ग आता आम्ही आपणास दाखवित आहोत.

"भौगोलिक नकाशांचे आरेखन" या आपल्या पुस्तकात रशियन गणितज्ञ पी. एल. चेबिशेव लिहितात की माणसाच्या व्यावहारिक जीवनामध्ये सर्वसाधारण ठरणाऱ्या वैज्ञानिक पद्धतींचे महत्त्व उच्च आहे: जास्तीत जास्त लाभ करून घेण्यासाठी आपल्या स्वतःच्या साधनांचा कशा प्रकारे उपयोग करून घेता येईल या गोष्टीला अधिक महत्त्व आहे.

दोन आगगाड्या

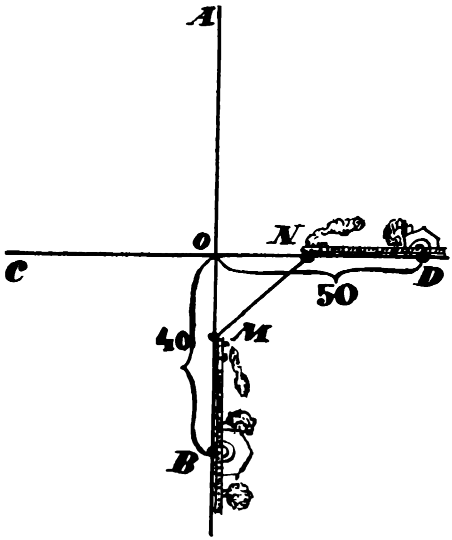
प्रश्न :

दोन लोहमार्ग एकमेकांना काटकोनात छेदतात. हे लोहमार्ग ज्या बिंदूशी एकमेकांना मिळतात त्या बिंदूच्या दिशेने दोन आगगाड्या जात आहेत: एक या बिंदूपासून 40 कि. मी. अंतरावर असलेल्या स्थानकापासून तर दुसरी त्याच बिंदूपासून 50 कि. मी. अंतरावर असलेल्या स्थानकापासून. पहिल्या आगगाडीचा वेग आहे मिनिटास 800 मीटर तर दुसरीचा मिनिटास 600 मीटर.

स्थानकावरून निघालेल्या क्षणापासून किती मिनिटांनी आगगाड्यांची इंजिने एकमेकांपासून कमीत कमी अंतरावर असतील? हे अंतर किती असेल?

उत्तर :

आपल्या कोड्यातील आगगाड्यांच्या मार्गांचे प्रथम रेखाटन करू. AB आणि CD हे एकमेकांना 0 बिंदूत, काटकोनात छेदणारे दोन लोहमार्ग आहेत असे समजू (आ. 18 पहा). B हे स्थानक 0 या बिंदूपासून 40 कि. मी. अंतरावर आहे तर D हे स्थानक त्यापासून 50 कि. मी. अंतरावर आहे. असे गृहीत धरू की x मिनिटांनी दोन्ही आगगाड्यांची इंजिने एकमेकांपासून MN=m या कमीत कमी अंतरावर असतील.



आकृती 18

B या स्थानकापासून निघालेली आगगाडी या क्षणापर्यंत BM=0.8x इतके अंतर पार करेल कारण तिचा वेग मिनिटास 800 मी.=0.8 कि. मी. आहे. परिणामी, OM=40—0.8x अगदी अशाच प्रकारे आपणाला ON=50—0.6x हे ठरविता येईल. पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार

$$MN = m = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{(40 - 0.8\,x)^2 + (50 - 0.6\,x)^2}\,.$$

आता

$$m = \sqrt{(40 - 0.8x)^2 + (50 - 0.6x)^2}$$

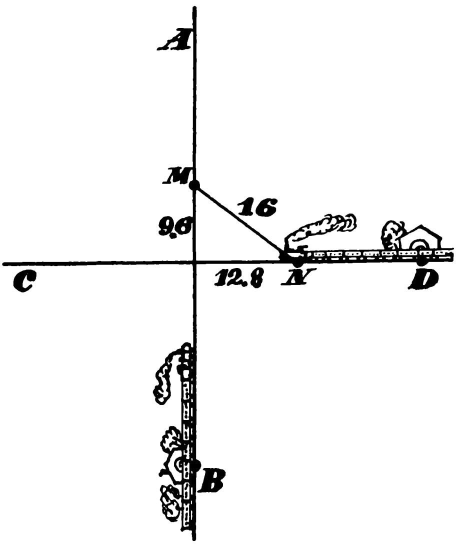
या समीकरणास सरळ रूप देऊ :

$$x^2 - 124x + 4\,100 - m^2 = 0$$

व हे समीकरण सोडविले असता x ची पुढील किंमत आपणाला मिळते ;

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}\,.$$

ज्या अर्थी x ही पार पडलेल्या मिनिटांची संख्या आहे त्या अर्थी ती काल्पनिक असू शकणार नाही. $m^2 - 256$ ही एक धन संख्याच



आकृती 19

असली पाहिजे किंवा फार तर ती शून्य असू शकेल. जर ती शून्य असेल तर ती m ची शक्य असलेली किमान किंमत ठरेल व त्या वेळी :

$m^2 = 256$ म्हणजेच $m = 16$ असेल.

साहजिकच m ची किंमत 16 पेक्षा कमी असूच शकणार नाही कारण त्यामुळे x ही एक काल्पनिक संख्या ठरेल. आणि जर $m^2 - 256 = 0$, तर $x = 62$.

अशा प्रकारे 62 मिनिटांनी दोन्ही आगगाड्यांची इंजिने एकमेकां-पासून जवळ असतील आणि त्यांच्या दरम्यानचे अंतर असेल 16 कि. मी.

या क्षणी त्यांची असलेली स्थिती पाहू. OM हे अंतर किती आहे ते प्रथम ठरवू. ते असेल

$$40 - 62 \times 0.8 = -9.6.$$

वजा चिन्हाचा अर्थ असा की आगगाडीचे इंजिन 0 या बिंदूला मागे टाकून 9.6 कि. मी. अंतरावर असेल. ON हे अंतर असेल

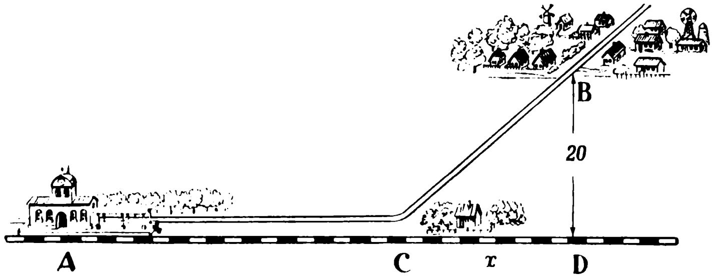
$$50 - 62 \times 0.6 = 12.8,$$

म्हणजेच दुसऱ्या आगगाडीचे इंजिन 0 बिंदूपासून 12.8 कि. मी. अंतरावर असेल (म्हणजेच ते अद्यापी 0 बिंदूपर्यंत पोहोचलेच नसेल). आ. 19 मध्ये दोन्ही आगगाड्यांच्या इंजिनांची स्थिती दाखविण्यात आली आहे. आपल्या कल्पनेपेक्षा या इंजिनांची स्थिती कितीतरी वेगळी असल्याचे आपणाला दिसून येईल. बीजगणितातील अचूक चिन्हांच्या साहाय्यानेच आपण अवघड दिसणारे कोडे सहजगत्या सोडवू शकतो.

छोटे स्थानक कोठे उभारावे?

प्रश्न :

सरळरेषात्मक लोहमार्गाच्या एका बाजूस 20 कि. मी. अंतरावर B हे एक छोटेसे खेडेगाव आहे. (आ. 20 पहा.)
AC या लोहमार्गाने आणि CB या मार्गाने A बिंदूपासून B बिंदूपर्यंत पोहोचायला कमीत कमी वेळ लागेल अशा रीतीने c हे छोटे स्थानक कोठे उभे करावे? AC या मार्गावर आगगाडीचा वेग असेल मिनिटास



आकृती 20

0.8 कि. मी. तर CB या मार्गावर तो असेल मिनिटास 0.2 कि. मी.

उत्तर :

A बिंदूपासून AD मार्गावरील BD या लंबाच्या पायापर्यंतचे AD हे अंतर a आहे व CD हे अंतर x आहे असे मानू. तेव्हा $AC = AD - CD = a - x$ असेल तर $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$ असेल. AC या मार्गावर आगगाडी

$$\frac{AC}{0.8} = \frac{a-x}{0.8}$$

इतका वेळ प्रवास करेल, तर CB हे अंतर पार करण्यास तिला

$$\frac{CB}{0.2} = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}$$

इतका वेळ लागेल. अशा प्रकारे A या बिंदूपासून निघून B पर्यंत पोहोचण्यास आगगाडीस एकूण

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}$$

इतका वेळ लागेल.

ही बेरीज m इतकी आहे असे मानू म्हणजे आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होईल :

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2} = m$$

ज्याला आपण थोडेसे वेगळे रूप देऊ :

$$-\frac{x}{0.8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}=m-\frac{a}{0.8}.$$

या समीकरणास 0.8 ने गुणल्यास :

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0.8\,m-a$$

हे समीकरण प्राप्त होईल.

$0.8\,m-a$ ची किंमत k आहे असे मानून, वर्गमूळ काढून आपणाला पुढील वर्गसमीकरण प्राप्त करता येईल.

$$15\,x^2-2\,kx+6\,400-k^2=0,$$

ज्यावरून

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96\,000}}{15}.$$

ज्या अर्थी $k=0.8m-a$, त्या अर्थी m ची किंमत कमीत कमी असताना k ची किंमतदेखील कमीत कमी असेल आणि याविरुद्ध, कारण या ठिकाणी एक गोष्ट ध्यानात घेतली पाहिजे की $k>0$ (कारण $0.8m=a-x+4\sqrt{x^2+20^2}>a-x+x=a.$) परंतु x ची किंमत काल्पनिक असू नये यासाठी $16x^2$ ची किंमत 96 000 पेक्षा मुळीच कमी असता कामा नये. $16x^2$ ची कमीत कमी किंमत असेल 96 000. म्हणून जेव्हा $16k^2=96\,000$ असेल तेव्हाच m ची किंमत कमीत कमी असेल आणि परिणामी x ची पुढील किंमत आपणाला प्राप्त होईल :

$$x=\frac{k\pm0}{15}=\frac{\sqrt{6\,000}}{15}\approx5.16.$$

AD हे अंतर कितीही असले तरी D या बिंदूपासून साधारणपणे 5 कि. मी. अंतरावर आपणाला हवे असणारे छोटेसे स्थानक उभारणे आवश्यक आहे.

परंतु ही गोष्ट खरी की जेव्हा $x<a$ असेल तेव्हाच आपले उत्तर बरोबर ठरेल, कारण समीकरण मांडताना आपण $a-x$ ही एक धनसंख्या आहे असे मानले होते.

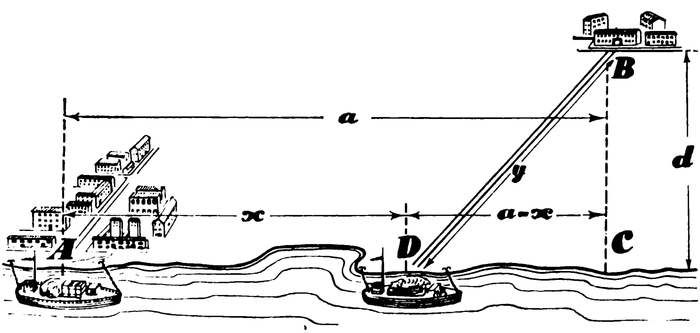
जर $x = a \approx 5.16$ असेल तर छोटे स्थानक उभारण्याची आवश्यकता मुळातच नाही, खेडेगावापासूनचा रस्ता सरळ स्थानकापर्यंत बांधण्यात यावा. a हे अंतर 5.16 कि. मी. पेक्षा कमी असताना-देखील छोटे स्थानक उभारण्याची आवश्यकता नाही.

या ठिकाणी आपली पूर्वदृष्टी समीकरणांपेक्षाही उच्च ठरली. जर समीकरणावर आपण आंधळेपणाने विश्वास ठेवला असता व A या स्थानकानंतर आपण C हे छोटे स्थानक उभे केले असते तर ही आपली घोडचूक ठरली असती, कारण $x > a$ असल्यामुळे लोहमार्गावर लागणारा वेळ दर्शविणारी $\frac{a-x}{0.8}$ ही संख्या ऋण आहे.

रस्ता कसा बांधावा?

प्रश्न :

नदीकिनाऱ्यावरील A या शहरापासून नदीच्या मार्गावर a कि. मी. व नदीकिनाऱ्यापासून d कि. मी. अंतरावर असलेल्या B या केंद्राकडे माल पाठवावयाचा आहे (आ. 21 पहा). B पासून नदी-च्या दिशेने अशा प्रकारे रस्ता बांधावयाचा आहे की A या ठिकाणाहून B ठिकाणापर्यंत माल नेणे स्वस्तात पडेल. नदीमार्गे माल वाहून नेणे रस्त्यावरून माल वाहून नेण्यापेक्षा दुप्पट स्वस्तात पडते ही गोष्ट ध्यानात घ्या. तर हा रस्ता कसा बांधावा?



आकृती 21

AD हे अंतर x आहे व DB रस्त्याची लांबी y आहे असे मानू: AC हे अंतर a आहे व BC ही लांबी d आहे असे गृहीत धरू.

ज्या अर्थी रस्त्यावरून मालाची वाहतूक करणे नदीमधून मालाची वाहतूक करण्यापेक्षा दुप्पट महाग पडते त्या अर्थी

$$x+2y$$

ही किंमत कमीत कमी ठरेल. ही किमान किंमत m आहे असे समजू म्हणजे आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होईल:

$$x+2y=m$$

परंतु $x=a-DC$. तर $DC=\sqrt{y^2-d^2}$ असल्यामुळे आपल्या समीकरणाला पुढील स्वरूप प्राप्त होईल:

$$a-\sqrt{y^2-d^2}+2y=m,$$

किंवा वर्गमुळाचे चिन्ह वगळता:

$$3y^2-4(m-a)y+(m-a)^2+d^2=0.$$

हे समीकरण सोडविल्यास:

$$y=\frac{2}{3}(m-a)\pm\frac{\sqrt{(m-a)^2-3d^2}}{3}.$$

y ची किंमत काल्पनिक असू नये यासाठी $(m-a)^2$ ची किंमत $3d^2$ पेक्षा कमी असता कामा नये. त्या अर्थी $(m-a)^2$ ची कमीत कमी किंमत आहे $3d^2$ आणि म्हणून

$$m-a=d\sqrt{3},\quad y=\frac{2(m-a)+0}{3}=\frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

$\sin\angle BDC=d\div y$, म्हणजेच

$$\text{Sin}\ \angle BDC=\frac{d}{y}=d\div\frac{2d\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

परंतु ज्याची ज्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ आहे असा कोन 60° चा असतो. याचा

अर्थ असा की AC हे अंतर कितीही असले तरी नदीशी 60° चा कोन करेल अशा रीतीने रस्ता बांधावा लागेल.

यापूर्वी आपण पाहिलेल्या कोड्याप्रमाणेच काही ठराविक अटींची पूर्तता केली तरच आपण काढलेले उत्तर योग्य व बरोबर ठरते. नदीशी 60° चा कोन करणारा रस्ता A शहराच्या दुसऱ्या बाजूने जाईल अशा प्रकारे जर B हे स्थान असेल तर आपले उत्तर अयोग्य ठरेल. अशा परिस्थितीत B हे स्थान A या शहराशी सरळ रस्त्याने जोडण्यात आले पाहिजे व मालाची वाहतूक नदीमार्गे मुळीच करता कामा नये.

गुणाकार जास्तीत जास्त केव्हा असेल?

"कमाल" आणि "किमान" मूल्यासंबंधीत, किंवा, दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास जास्तीत जास्त आणि कमीत कमी किंमती काढण्यासाठी बीजगणितातील आणखी एका सिद्धांताची कशा प्रकारे मदत घेता येते ते आता आपण पाहू. यासंबंधीत एक कोडे आता विचारात घेऊ :

जास्तीत जास्त मोठा गुणकार प्राप्त होईल अशा रीतीने एखाद्या संख्येचे दोन भागात कशा प्रकारे विभाजन करता येईल?

उत्तर :

असे समजू की ही संख्या a आहे. तेव्हा या संख्येचे दोन भाग खालील प्रकारे असतील

$$\frac{a}{2}+x \text{ आणि } \frac{a}{2}-x;$$

जेथे x ही संख्या आपणाला a या संख्येच्या निम्म्यापेक्षा हे भाग किती मोठे अथवा लहान आहेत हे दर्शविते. या दोन भागांचा गुणाकार असेल :

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2.$$

येथे आपणाला स्पष्टपणे दिसून येत आहे की x ची किंमत जितकी कमी होईल तितके गुणन फल मोठे होईल, म्हणजेच या दोन भागांमधील

फरक जितका कमी तितका त्यांचा गुणाकार मोठा. जेव्हा $x=0$ असेल, म्हणजेच जेव्हा दोन्ही भाग $\frac{a}{2}$ इतके असतील तेव्हा या दोन भागांदरम्यानचा गुणाकार जास्तीत जास्त मोठा असेल.

अशा प्रकारे संख्येची निम्म्या-निम्म्या भागात विभागणी केली पाहिजे: जेव्हा दोन संख्या समान असतील तेव्हा त्यांच्या दरम्यानचा गुणाकार जास्तीत जास्त मोठा असतो.

आता तीन संख्यांच्या बाबतीत वरील प्रश्न विचारात घेऊ.

जास्तीत जास्त मोठे गुणन फल मिळविण्यासाठी एखाद्या संख्येची तीन भागात विभागणी कशी करता येईल?

उत्तर:

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी आपण पुन्हा या पूर्वीच्या प्रश्नाकडे वळू.

असे समजू की a या संख्येचे तीन भाग करण्यात आलेले आहेत. सुरुवातीस असे गृहीत धरू की त्यापैकी कोणताही भाग $\frac{a}{3}$ इतका नाही. तेव्हा या तीन पैकी एक भाग $\frac{a}{3}$ पेक्षा मोठा आहे (कारण सर्व तीन भाग $\frac{a}{3}$ पेक्षा लहान असू शकणार नाहीत); असे समजू की हा भाग आहे:

$$\frac{a}{3}+x.$$

अगदी अशाच प्रकारे या तीन भागांमध्ये $\frac{a}{3}$ पेक्षा लहान भाग आहे व तो $\frac{a}{3}-y$ आहे असे समजू.

x आणि y या धनसंख्या आहेत. जर दोन भाग वरीलप्रमाणे असतील तर तिसरा भाग असेल:

$$\frac{a}{3}+y-x.$$

$\frac{a}{3}$ आणि $\frac{a}{3}+x-y$ या संख्यांची बेरीज a संख्येच्या पहिल्या दोन भागांच्या बेरजेइतकीच आहे, तर त्यांच्या दरम्यानचा फरक, म्हणजेच $x-y$ पहिल्या दोन भागांदरम्यानच्या फरकापेक्षा $(x+y$

पेक्षा) कमी आहे. यापूर्वीच्या कोड्यावरून आपणाला ठाऊक झाल्या-प्रमाणे $\frac{a}{3}(\frac{a}{3}+x-y)$ हा गुणाकार a संख्येच्या पहिल्या दोन भागांच्या गुणाकारापेक्षा मोठा आहे.

अशा प्रकारे, a संख्येच्या पहिल्या दोन भागांऐवजी जर $\frac{a}{3}$ आणि $\frac{a}{3}+x-y$ मांडण्यात आले आणि तिसरा भाग तसाच ठेवला तर गुणाकारात वृद्धी होते.

आता असे समजू की तीन पैकी एक भाग $\frac{a}{3}$ इतका आहे. असे असेल तर इतर दोन भाग पुढीलप्रमाणे असतील :

$$\frac{a}{3}+z \text{ आणि } \frac{a}{3}-z.$$

जर आपण हे शेवटचे दोन भाग $\frac{a}{3}$ इतके केले (त्यांची बेरीज या स्थितीत बदलणार नाही), तर गुणन फलात पुन्हा वृद्धी होईल

$$\frac{a}{3}\times\frac{a}{3}\times\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}.$$

अशा प्रकारे जर a या संख्येचे तीन असमान भागात विभाजन केले तर त्यांचा गुणाकार $\frac{a^3}{27}$ पेक्षा कमी असेल, म्हणजेच हा गुणाकार ज्यांची बेरीज a इतकी होईल अशा तीन समान भागांपेक्षा कमी असेल.

याच पद्धतीने चार, पाच इ. इ. भागांच्या बाबतीतही हा सिद्धांत सिद्ध करून दाखविता येईल.

आता एका अधिक सर्वसाधारण स्थितीचा विचार करू.

जर $x+y=a$ असेल तर $x^p y^q$ ची किंमत जास्तीत जास्त व्हावी यासाठी x आणि y च्या किंमती काय असायला हव्यात ?

उत्तर :

आपणाला हे शोधून काढावयाचे आहे की x ची किंमत काय असायला हवी म्हणजे $x^p(a-x)^q$ ची किंमत जास्तीत जास्त होईल.

आता या संख्येस $\frac{1}{p^p q^q}$ ने गुणू. एक नवीन पदावली प्राप्त होईल :

$$\frac{x^p}{p^p}\frac{(a-x)^q}{q^q}.$$

जेव्हा सुरुवातीच्या पदावलीची किंमत जास्तीत जास्त असेल तेव्हाच या पदावलीची किंमत देखील जास्तीत जास्त होईल.

आपणाला प्राप्त झालेल्या पदावलीस पुढील स्वरूप देऊ:

$$\underbrace{\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}}_{p \text{ वेळा}}\ldots\times\underbrace{\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}}_{q \text{ वेळा}}\ldots$$

या पदावलीतील सर्व गुणकांची बेरीज असेल:

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}}_{p \text{ वेळा}}+\ldots+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}}_{q \text{ वेळा}}+\ldots=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

म्हणजेच एक निश्चित राशी असेल.

यापूर्वी आपण पाहिलेल्या प्रश्नांप्रमाणेच

$$\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\ldots\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\ldots$$

हा गुणाकार जर त्यातील सर्व गुणक समान असतील, म्हणजेच

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}$$

असेल तरच जास्तीत जास्त होईल.

$a-x=y$ हे आपणाला ठाऊक असल्यामुळे

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

अशा प्रकारे जर

$$x\div y=p\div q.$$

असेल तर $x+y$ यांची बेरीज एक निश्चित राशी असते वेळी $x^p y^q$ हा गुणाकार जास्तीत जास्त मोठा ठरतो.

याच पद्धतीने आपण हे दाखवू शकतो की $x+y+z$, $x+$ $+y+z+t$ इ. इ. यांची बेरीज एक निश्चित राशी असताना जर

$$x \div y \div z = p \div q \div r,$$
$$x \div y \div z \div t = p \div q \div r \div u \text{ इ. इ.}$$

असेल तर

$$x^p y^q z^r,\ x^p y^q z^r t^u \text{ इ,}$$

गुणाकारांचे फल जास्तीत जास्त असते.

बेरीज कमीत कमी केव्हा असते?

बीजगणितातील नित्योपयोगी सिद्धांत सिद्ध करून दाखवू इच्छिणाऱ्या आमच्या वाचकांना आपले ज्ञान आजमावून पहावयाचे असेल तर त्यांनी पुढील गोष्टी सिद्ध करून दाखवाव्यात:

1. ज्यांचा गुणाकार समान, निश्चित आहे अशा दोन संख्या जेव्हा समान असतात तेव्हाच त्यांची बेरीज कमीत कमी असते.

उदाहरणार्थ, ज्यांचा गुणाकार 36 आहे अशा संख्या: $4+9=13$, $3+12=15$, $2+18=20$, $1+36=37$ आणि $6+6=12$.

2. ज्यांचा गुणाकार निश्चित आहे अशा अनेक संख्यांची बेरीज, जर त्या संख्या समान असतील तर कमीत कमी असते.

उदाहरणार्थ, ज्यांचा गुणाकार 216 आहे अशा संख्या: $2+18+6=26$, $9+6+3=19$ आणि त्याचप्रमाणे $6+6+6=18$.

या सिद्धांतांचा उपयोग दैनंदिन जीवनामध्ये कशा प्रकारे केला जातो ते आम्ही उदाहरणासह दाखवून देऊ.

जास्तीत जास्त आकारमानाची तुळई

प्रश्न:

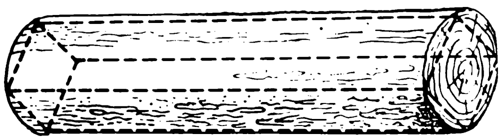
दंडगोलाकृती लाकडी ओंडक्यापासून सर्व बाजू काटकोनात असलेली जास्तीत जास्त आकारमानाची तुळई तयार करावयाची आहे या ओंडक्याचे छेद कशा प्रकारे घेतले पाहिजे?

उत्तर :

जर काटकोनात छेद घ्यावयाच्या बाजू x आणि y असतील तर पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार

$$x^2+y^2=d^2,$$

जेथे d= ओंडक्याचा व्यास. जेव्हा छेदाचे क्षेत्रफळ कमाल असेल, म्हणजेच जेव्हा xy चे मूल्य जास्तीत जास्त असेल तेव्हाच तुळईचे



आकृती 22

आकारमान जास्तीत जास्त होईल. परंतु जर xy जास्तीत जास्त असेल तर x^2y^2 हा गुणाकार देखील जास्तीत जास्त होईल. ज्या अर्थी x^2+y^2 ही बेरीज निश्चित आहे त्या अर्थी यापूर्वी सिद्ध केल्याप्रमाणे, जेव्हा

$$x^2=y^2=d^2$$

जेथे d— ओंडक्याचा व्यास. जेव्हा छेदाचे क्षेत्रफळ कमाल असेल, म्हणजेच जेव्हा xy चे मूल्य जास्तीत जास्त असेल तेव्हाच तुळईचे आकारमान जास्तीत जास्त होईल. परंतु जर xy जास्तीत जास्त असेल तर x^2y^2 हा गुणाकारदेखील जास्तीत जास्त होईल. ज्या अर्थी x^2+y^2 ही बेरीज निश्चित आहे, त्या अर्थी यापूर्वी सिद्ध केल्याप्रमाणे, जेव्हा

$$x^2=y^2 \text{ आणि } x=y$$

असेल तेव्हाच x^2y^2 हा गुणाकार जास्तीत जास्त असेल. अशा प्रकारे ओंडक्याचा चौरसाकृती छेद घेतला पाहिजे.

दोन जमिनी

प्रश्न :

1. काटकोनाकृती जमिनीच्या तुकड्याची कुंपण असलेली लांबी कमीत कमी असण्यासाठी दिलेल्या क्षेत्रफळानुसार त्या तुकड्याचा आकार कसा असावयास हवा ?

2. काटकोनाकृती जमिनीच्या तुकड्याचे क्षेत्रफळ जास्तीत जास्त असण्यासाठी दिलेल्या कुंपणाच्या लांबीनुसार त्या तुकड्याचा आकार कसा असावयास हवा ?

उत्तर :

1. काटकोनाकृती जमिनीच्या तुकड्याचा आकार त्याच्या x आणि y या बाजूंच्या प्रमाणावर अवलंबून असेल. x आणि y बाजू असलेल्या तुकड्याचे क्षेत्रफळ xy असेल, तर कुंपणाची लांबी $2x+2y$ इतकी असेल. जर $x+y$ चे मूल्य कमीत कमी असेल तर कुंपणाची लांबी कमीत कमी होईल.

xy या गुणाकाराच्या परिणामी $x+y$ ची बेरीज, $x=y$ असताना कमीत कमी होईल. परिणामी आपणाला हवा असलेला जमिनीचा तुकडा समभुज काटकोन चौकोनाकृती असावयास हवा.

2. जर x आणि y काटकोनाकृतीच्या बाजू असतील तर कुंपणाची लांबी $2x+2y$ इतकी आणि क्षेत्रफळ xy इतके असेल. जेव्हा 4xy म्हणजेच $2x \times 2y$ चे गुणनफल जास्तीत जास्त असेल तेव्हाच xy या गुणाकाराचे गुणनफल जास्तीत जास्त होईल. $2x=2y$ असेल, तरच $2x \times 2y$ चे गुणनफल जास्तीत ठरेल म्हणजेच जमिनीचा तुकडा समभुज चौरसाकृती असावयास हवा.

समभुज काटकोन चौकोनाचे अनेक गुणधर्म आपणाला भूमितीशास्त्राद्वारे ठाऊक आहेत. आता वरील कोड्यांच्या मदतीने आपण त्यामध्ये आणखी एका गुणधर्माची भर घालू शकतो : सर्व काटकोनाकृती आकृत्यांमध्ये दिलेल्या क्षेत्रफळानुसार समभुज काटकोन चौकोनाची

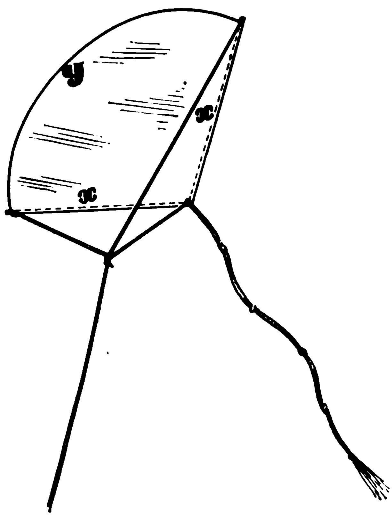
परिमिती कमीत कमी असू शकते तर दिलेल्या परिमितीनुसार केवळ समभुज काटकोन चौकोनाचे क्षेत्रफळ जास्तीत जास्त असू शकते.

कागदी पतंग

प्रश्न :

वर्तुळ खंडाचा आकार असलेल्या पतंगाला* त्याच परिमितीनुसार कमाल क्षेत्रफळ व्यापू शकेल असा आकार द्यावयाचा आहे. तर या वर्तुळ खंडाचा आकार कसा असावयास हवा.

उत्तर :



आकृती 23

* सोविएत संघामध्येही पतंग उडविले जातात. आपल्याकडे उडविल्या जाणाऱ्या पतंगामध्ये आणि येथील पतंगांमध्ये फरक आहे. येथील पतंग विविध आकाराचे असतात. आकृती क्र. 23 वरून आपणाला या गोष्टीची कल्पना येईलच.—सं.

कोड्यातील अटी ध्यानात घेता आपणाला सर्वप्रथम हे जाणून घेणे आवश्यक आहे की दिलेल्या परिमितीनुसार वर्तुळ खंडाच्या कंसाची आणि त्रिज्येची लांबी किती असावयास हवी म्हणजे या तुकड्याचे क्षेत्रफळ जास्तीत जास्त ठरेल.

जर त्रिज्या x असेल आणि कंस y असेल तर परिमिती l व क्षेत्रफळ S पुढील प्रकारे व्यक्त करता येईल (आ. 23):

$$l=2x+y,$$
$$S=\frac{xy}{2}=\frac{x(l-2x)}{2}.$$

$2x(l-2x)$ या गुणाकारामध्ये x ची जी किंमत असेल त्याच किंमतीनुसार S ची किंमत जास्तीत जास्त असेल. ज्या अर्थी $2x(l-2x)=l$ मध्ये गुणकांची बेरीज निश्चित आहे त्या अर्थी जेव्हा $2x=l-2x$ असेल तेव्हा त्यांचे गुणनफल जास्तीत जास्त होईल. यावरून

$$x=\frac{l}{4},$$
$$y=l-2\times\frac{l}{4}=\frac{l}{2}.$$

अशा रीतीने दिलेल्या परिमितीनुसार वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ तेव्हाच जास्तीत जास्त असू शकेल जेव्हा त्याची त्रिज्या कंसाच्या निम्याइतकी असेल; या तुकड्याचा कोन $\approx 115^\circ$ – दोन रेडिअन* असेल.

घराचे बांधकाम

प्रश्न :

एका पडक्या घराची फक्त एकच भींत शाबूत आहे. या जागी नवे घर बांधावयाचे आहे. जुन्या भिंतीची लांबी आहे 12 मिटर.

---

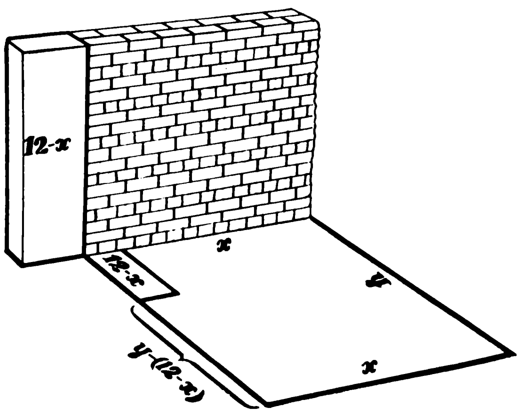
* रेडिअन – कोणत्याही वर्तुळातील त्रिज्येच्या लांबीएवढ्या कंसाने केलेल्या केंद्रीय कोनाचे माप म्हणजे 1 रेडिअन होय. – सं.

नव्या घराचे क्षेत्रफळ 112 वर्ग मी. असावयास हवे. बांधकामाच्या काही अटी अशा आहेत :

1, जुन्या भिंतीच्या दुरुस्तीचा खर्च प्रत्येक मीटरास नव्याने बांधल्या जाणाऱ्या भिंतीसाठी खर्चाच्या 25% आहे ;

2, जुन्या भिंतीचा 1 मीटर भाग पाडून तेच बांधकाम साहित्य वापरून नवी भींत बांधल्यास प्रत्येक मीटर बांधकामाला, नवे साहित्य वापरून एक मीटर भींत बांधण्यास येणाऱ्या खर्चाच्या 50% कमी खर्च येतो.

अशा परिस्थितीत जुन्या भिंतीचा जास्तीत जास्त चांगल्या रीतीने कसा उपयोग करून घेता येईल?



आकृती 24

उत्तर :

जुन्या भिंतीचा x मीटर भाग राखून बाकी 12 — x मीटर भाग पाडू व 12 — x मीटर जुन्या भिंतीचे साहित्य नव्या घराची भींत बांधण्यासाठी वापरू (आ. 24 पहा) जर नवे साहित्य वापरून भींत उभारण्यासाठी प्रत्येक मीटर बांधकामावर a खर्च येत असेल तर x मीटर जुन्या भिंतीच्या दुरुस्तीवर $\frac{xa}{4}$ इतका, 12 — x मीटर लांबीची भींत

(जुने साहित्य वापरून) उभारण्यावर $\frac{a(12-x)}{2}$; या भिंतीचा बाकी भाग बांधण्यावर $a[y-(12-x)]$ म्हणजेच $a(y+x-12)$, तिसऱ्या भिंतीच्या बांधकामावर ax आणि चौथ्या भिंतीवर ay इतका खर्च येईल. म्हणजे एकूण खर्च येईल :

$$\frac{ax}{4}+\frac{a(12-x)}{2}+a(y+x-12)+ax+ay=\frac{a(7x+8y)}{4}-6a.$$

जेव्हा $7x+8y$ ही बेरीज कमीत कमी असेल तेव्हाच या शेवट-च्या पदावलीचे मूल्य कमीत कमी असेल.

आपणाला ठाऊक आहे की घराचे क्षेत्रफळ xy हे 112 वर्ग मीटर आहे, म्हणून

$$7x\times 8y=56\times 112.$$

जर $7x=8y$ असेल तरच $7x+8y$ या बेरजेतील राशींचा गुणाकार कमीत कमी असतो, याचा अर्थ

$$y=\frac{7}{8}x.$$

आता $xy=112$ या समीकरणात ही किंमत घालू: म्हणजे

$$\frac{7}{8}x^2=112, \qquad x=\sqrt{128}\approx 11.3.$$

ज्या अर्थी जुन्या भिंतीची लांबी 12 मी. आहे त्या अर्थी या भिंतीचा फक्त 0,7 मी. भाग पाडावा लागेल.

मळ्यातील घर

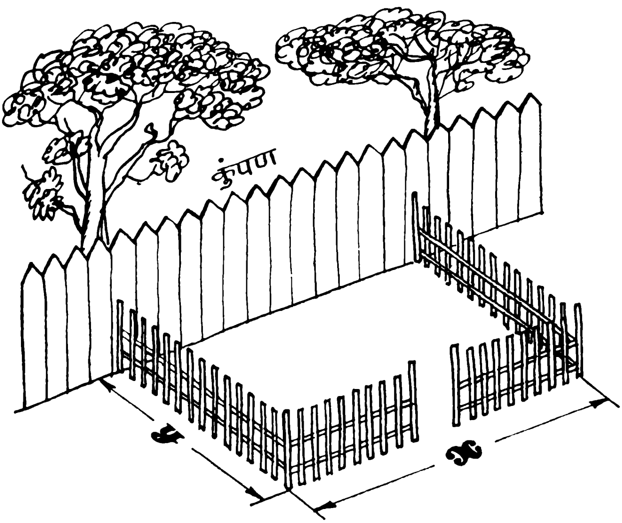
प्रश्न :

मळ्यामध्ये घर बांधण्यासाठी जागेभोवती कुंपण घालावयाचे होते. सरळ रेषेत *l* मीटर कुंपण घालण्यास पुरेसे ठरेल इतके साहित्य

उपलब्ध होते. या शिवाय यापूर्वी उभारण्यात आलेल्या कुंपणाचे साहित्यसुद्धा वापरता येत होते (नव्या कुंपणाच्या एका बाजूच्या स्वरूपात). अशा परिस्थितीत जास्तीत जास्त क्षेत्रफळ व्यापू शकेल असे काटकोनाकृती कुंपण कशा प्रकारे उभे करता येईल?

उत्तर :

कुंपणाची लांबी (जुन्या कुंपणाला समांतर) x व रुंदी (म्हणजेच जुन्या कुंपणाला लंबरूपात) y आहे (आ. 25) असे समजू. जमिनीच्या या तुकड्याला



आकृती 25

x+2y मीटर एकूण लांबीचे कुंपण घालावे लागेल, म्हणून

$$x+2y=l.$$

जागेचे क्षेत्रफळ आहे :

$$S=xy=y(l-2y).$$

$2y(l-2y)$ या राशीमुळे s ची किंमत जास्तीत जास्त होऊ शकेल (म्हणजेच क्षेत्रफळ दुप्पट होईल). हे मूल्य म्हणजेच ज्यांची बेरीज कायम l होते अशा दोन गुणकांचा गुणाकार आहे. म्हणूनच

जास्तीत जास्त क्षेत्रफळ प्राप्त करण्यासाठी

$$2y=l-2y$$

असणे जरूरी आहे, त्या अर्थी

$$y=\frac{l}{4}, \quad x=l-2y=\frac{l}{2}.$$

दुसऱ्या शब्दात सांगावयाचे झाल्यास $x=2y$, म्हणजेच जागेची लांबी तिच्या रुंदीपेक्षा दुप्पट असावयास हवी.

पन्हाळीचा जास्तीत जास्त मोठा छेद

प्रश्न :

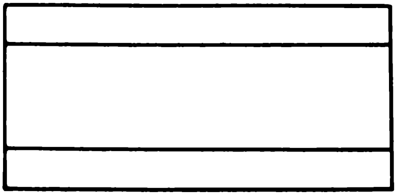
काटकोनाकृती धातूच्या पट्टीला (आ. 26) समान बाजू असलेली पन्हाळी बनविण्यासाठी वाकवावयाचे आहे. आ. 27 मध्ये दाखविल्या-प्रमाणे, विविध प्रकारे असे करता येते. पन्हाळीच्या छेदाचे क्षेत्रफळ जास्तीत जास्त होईल यासाठी तिच्या बाजूंची रुंदी किती असावयास हवी व किती अंशाच्या कोनामध्ये त्या दुमडण्यात आल्या पाहिजेत?

उत्तर :

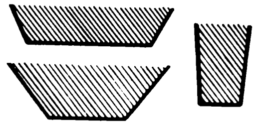
पट्टीची रुंदी l आहे असे मानू. पन्हाळीच्या बाजू x आहेत व तळ y आहे असे गृहीत धरू. आणखी एक अज्ञात मूल्य z गृहीत धरू. आकृती क्र. 28 मध्ये या गृहीताचे महत्त्व काय आहे हे दिसून येईल.

पन्हाळीच्या छेदाच्या स्वरूपात असलेल्या समलंब चतुर्भुजाचे क्षेत्रफळ असेल :

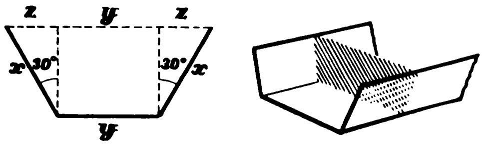
$$S=\frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2}=\sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}.$$



आकृती 26



आकृती 27



आकृती 28

आता आपणाला x, y आणि z च्या अशा किंमती शोधून काढावयाच्या आहेत की ज्यामुळे s चे मूल्य जास्तीत जास्त ठरेल. $2x + y$ (म्हणजेच पट्टीची रुंदी) ही बेरीज l चे मूल्य कायमपणे टिकवून ठेवेल. समीकरणाची पुनर्मांडणी करू :

$$S^2 = (y+z)^2 (x+z)(x-z).$$

$3s^2$ प्रमाणेच s^2 ची किंमत x, y आणि z च्या त्याच किंमती असताना जास्तीत जास्त ठरते. $3s^2$ ची किंमत पुढील गुणाकाराच्या स्वरूपात व्यक्त करता येईल :

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

या चार राशींच्या गुणाकाराचे फल असेल

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z = 2y+4x = 2l,$$

म्हणजेच ते बदलत नाही. म्हणून जेव्हा आपल्या या गुणक राशी समान असतील तेव्हा गुणन फल जास्तीत जास्त असते, म्हणजेच

$$y+z = x+z \text{ आणि}$$
$$x+z = 3x-3z.$$

पहिल्या समीकरणावरून

$$y=x$$

आणि ज्या अर्थी $y+2x=l$ त्या अर्थी $x=y=\frac{l}{3}$,

दुसऱ्या समीकरणावरून :

$$z=\frac{x}{2}=\frac{l}{6}.$$

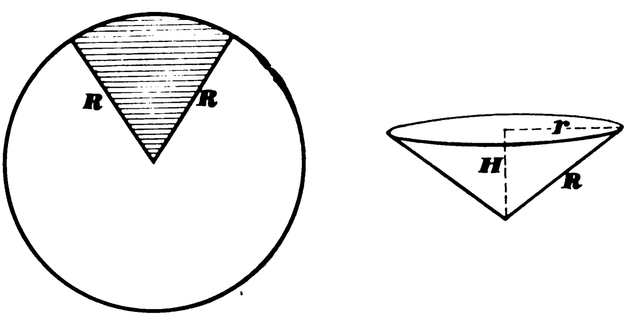
पुढे z ही लंबरेषा x कर्णाच्या (आ. 28) निम्मी असल्यामुळे या लंबरेषेच्या विरुद्ध, समोर असलेला कोन 30° चा असेल तर पन्हाळीच्या बाजू आणि तळा दरम्यानचा कोन $90°+30°=120°$ चा असेल.

अशा रीतीने षटकोनाच्या तीन एकत्रित बाजूंप्रमाणे पन्हाळीला आकार दिला असता तिचा छेद जास्तीत जास्त मोठा होईल.

जास्तीत जास्त क्षमता असलेले नरसाळे

प्रश्न :

पत्र्याच्या एका वर्तुळापासून शंकूचा आकार असलेले नरसाळे तयार करावयाचे आहे. यासाठी वर्तुळाचा एक खंड कापून काढतात आणि बाकी भाग जोडून शंकू तयार करतात (आ. 29 पहा).



आकृती 29

जास्तीत जास्त क्षमतेचे नरसाळे बनविण्यासाठी कापून काढण्यात आलेल्या कंसाचा कोन किती अंशाचा असायला हवा?

उत्तर :

जो भाग दुमडला जातो त्याच्या कंसाची लांबी x आहे असे समजू. म्हणून, शंकू तयार करणाऱ्या पत्र्याच्या तुकड्याची त्रिज्या असेल R तर परिघ असेल x. मुख्य शंकूची त्रिज्या आता आपण ठरवू शकतो:

$$2\pi r = x, \text{ ज्यावरून } r = \frac{x}{2\pi}.$$

शंकूची उंची (पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार):

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

असेल. (आ. 29 पहा). या शंकूची क्षमता:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{4\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

इतकी असेल.

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

या समीकरणाची आणि त्याच्या वर्गाची

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]$$

किंमत जास्तीत जास्त असेल तरच क्षमतेसंबंधित समीकरणाची किंमत जास्तीत जास्त ठरू शकेल.

ज्या अर्थी

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

हे मूल्य अबाधीत आहे त्या अर्थी (यापूर्वी आपण सिद्ध केल्याप्रमाणे) x ची किंमत तीच असताना जेव्हा

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \div \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 \div 1$$

असेल तेव्हाच

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]$$

या गुणाकाराची किंमत जास्तीत जास्त होईल, यावरून

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2-2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2 \text{ आणि}$$

$$x=\frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}\approx 5.15\,R.$$

अंशामध्ये, कंस $x\approx 295°$ आणि म्हणून वर्तुळातून कापून काढण्यात आलेल्या कंसाचा कोन असेल $\approx 65°$.

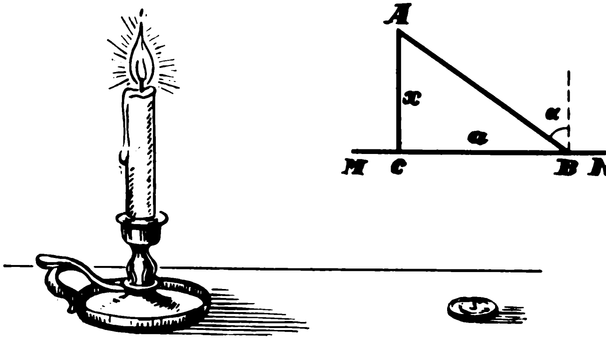
जास्तीत जास्त प्रकाश

प्रश्न :

टेबलावर पडलेल्या नाण्यावर जास्तीत जास्त प्रकाश पडावा यासाठी मेणबत्तीची ज्योत टेबलावर किती उंचीवर असावयास हवी ?

उत्तर :

सकृत दर्शनी असे वाटेल की जास्तीत जास्त प्रकाश मिळविण्यासाठी ज्योत शक्यतो खाली असावयास हवी. हे चुकीचे आहे: ज्योत जर कमी उंचीवर असेल तर प्रकाश अत्यंत तिरका पडतो. प्रकाश उभा पडेल अशा रीतीने मेणबत्ती उंचावणे – याचा अर्थ प्रकाशाचे उगमस्थान दूर नेणे होय. प्रकाशाच्या बाबतीत अधिक फायदेशीर म्हणजे टेबलाच्यावर ज्योतीची सरासरी, काहीशी मध्यम उंची शोधून काढणे. ही उंची x आहे असे समजू (आ. 30 पहा).



आकृती 30

B या नाण्यापासून मेणबत्तीच्या c या पायापर्यंतचे BC हे अंतर, जे या मेणबत्तीच्या A या ज्योतीला लंबरूप आहे, a आहे असे मानू. जर ज्योतीची तीव्रता i असेल तर प्रकाश नियमानुसार नाण्याची प्रकाशकता पुढीलप्रमाणे व्यक्त करता येईल :

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

जेथे a—AB प्रकाश किरणानी केलेला कोन. ज्या अर्थी

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

त्या अर्थी प्रकाशकता

$$\frac{i}{a^2+x^2}\times\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

इतकी असेल.

या समीकरणाच्या वर्गामध्ये x ची जी किंमत असेल तीच किंमत ठेवल्यास या समीकरणाची किंमत जास्तीत जास्त होईल, म्हणजेच

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

i^2 ही निश्चित राशी सोडून देऊन या समीकरणाच्या बाकी भागाची पुनर्मांडणी करू :

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}=\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)$$

या समीकरणाबरोबरच आपण पुनर्मांडणी केलेल्या समीकरणाची जास्तीत जास्त किंमत प्राप्त करता येईल. वरील गुणक राशींच्या प्रथम घातांची बेरीज

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}+\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=1$$

ही एक निश्चित राशी आहे ही गोष्ट ध्यानात घेता आपणाला असा निष्कर्ष काढता येईल की

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}\div\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=2\div 1$$

असेल तरच वरील गुणाकाराचे गुणनफल जास्तीत जास्त मोठे असेल (पहा पृ. 184 — 185).

आता आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होते :

$$a^2=2\,x^2+2\,a^2-2\,a^2.$$

हे समीकरण सोडवले असता :

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\approx 0.71\,a$$

जेव्हा प्रकाशाचे उद्गमस्थान, मेणबत्तीचा पाया आणि नाण्या-दरम्यानच्या अंतराच्या 0.71 उंचीवर असेल तर जास्तीत जास्त प्रकाश नाण्यावर पडेल. कामाची जागा अधिक प्रकाशमय बनविण्यासाठी या ज्ञानाचा आपणाला नक्कीच उपयोग होईल.

प्रकरण 8

श्रेढी

अतिप्राचीन श्रेढी

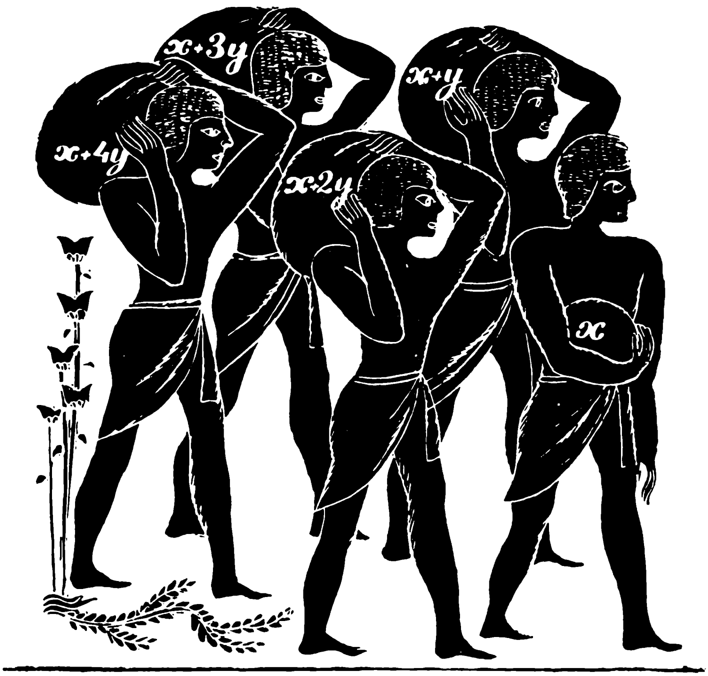
प्रश्न :

श्रेढीसंबंधित अतिप्राचीन कोडे – बुद्धिबळाच्या जनकाला देण्यात आलेल्या बक्षिसासंबंधित दोन हजार वर्षांपूर्वीचे कोडे या अतिप्राचीन कोड्यापुढे प्राचीनतेच्या बाबतीत फिके पडेल. गव्हाच्या वाटणीसंबंधित हे अत्यंत प्राचीन कोडे इजिप्शीयन पानवृक्षावर लिहिण्यात आले होते. गत शतकाच्या अखेरीस रिंदने ते शोधून काढले. हा पानवृक्ष साधारण-पणे ख्रि. पू. दोन सहस्रवर्षांपूर्वीचा असून असे समजले जाते की त्या-हूनही प्राचीन, जवळ जवळ ख्रि. पू. तीन सहस्रवर्षांपूर्वीच्या एका प्राचीन गणितशास्त्रावरील निबंधांमधून ते कोडे घेण्यात आले होते. अंकगणित, बीजगणित व भूमितीवरील कोड्यांमध्ये पुढील एक कोडे होते (सुलभता आणण्यासाठी मुक्त भाषांतर करण्यात आले आहे) :

पाच लोकांच्या दरम्यान शंभर मापे गव्हाची अशा प्रकारे वाटणी करावयाची आहे की दुसऱ्याला पहिल्यापेक्षा तितकाच अधिक गहू मिळेल जितका तिसऱ्याला दुसऱ्यापेक्षा, चौथ्याला तिसऱ्यापेक्षा, पाचव्याला चौथ्यापेक्षा. याव्यतिरिक्त पहिल्या दोघांना बाकी तीन जणांपेक्षा सातपट कमी गहू मिळावयास हवा. प्रत्येकाला किती गहू दिला पाहिजे?

उत्तर :

कोड्यावरून स्पष्टच आहे की या ठिकाणी आपणासमोर वाढती समानांतर श्रेढी आहे. असे गृहीत धरू की x हे तिचे पहिले पद आहे व y तिचे सामान्य अंतर आहे. म्हणून



आकृती 31

पहिल्याचा वाटा	x
दुसऱ्याचा वाटा	$x+y$
तिसऱ्याचा वाटा	$x+2y$
चौथ्याचा वाटा	$x+3y$
पाचव्याचा वाटा	$x+4y$

कोड्यातील अटीच्या आधारावर आपण पुढील दोन समीकरणे मांडू :

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100,$$
$$7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y).$$

पहिले समीकरण सोडवले असता :

$$x + 2y = 20$$

व दुसरे समीकरण सोडवले असता :

$$11x = 2y.$$

यावरून

$$x = 1\frac{2}{3}, \quad y = 9\frac{1}{6}.$$

म्हणजेच गव्हाची वाटणी पुढीलप्रमाणे व्हावयास हवी :

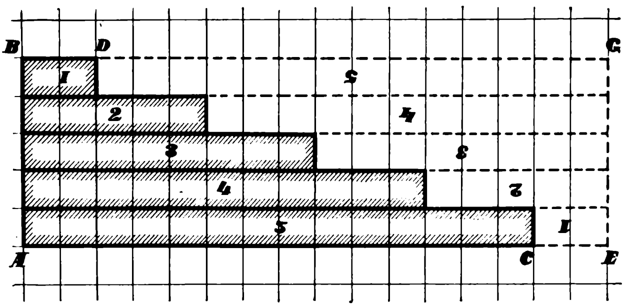
$$1\frac{2}{3}, \ 10\frac{5}{6}, \ 20, \ 29\frac{1}{6}, \ 38\frac{1}{3}.$$

चौकटीच्या कागदावरील बीजगणित

हे कोडे पन्नास शतकांपूर्वीचे असले तरीही शालेय गणितशास्त्राच्या कार्यक्रमात त्याने अगदी अलिकडेच स्थान प्राप्त केले आहे. मग्नीत्स्कीच्या गणितशास्त्राच्या पाठ्यपुस्तकात – जे दोनशे वर्षांपूर्वी प्रकाशित करण्यात आले होते व जवळ जवळ पन्नास वर्षे शालेय कार्यक्रमात त्याने महत्त्वाचे स्थान प्राप्त केले होते – श्रेढीविषयक भाग होता खरा परंतु अगदीच ढोबळ स्वरूपाचा. श्रेढीमधील पदांचा एकमेकांशी संबंध स्पष्ट करणाऱ्या सुत्रांचा त्यामध्ये अंतर्भाव नव्हता. खुद्द पाठ्यपुस्तकाच्या लेखकाला त्यामुळे अशा प्रकारची कोडी सोडविणे कठीण गेले. चौकटीच्या कागदाच्या मदतीने समानांतर श्रेढीतील पदांच्या बेरजेसंबंधित सुत्रांची सोप्या पद्धतीने मांडणी करता येते. अशा प्रकारच्या कागदावर कोणत्याही समानांतर श्रेढीची जिन्याच्या स्वरूपात मांडणी करता येते. उदाहरणार्थ, चित्र क्र. 32 मधील ABCD ही आकृती पुढील श्रेढी व्यक्त करते :

2; 5; 8; 11; 14.

या श्रेढीतील पदांची बेरीज निश्चित करण्यासाठी या आकृतीला वाढवून ABGE या काटकोन चौकोनाचे स्वरूप देऊ. आता आपणाला ABDC आणि DGEC अशा दोन समान आकृत्या मिळतात. यापैकी प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळ आपल्या श्रेढीतील पदांची एकूण बेरीज



आकृती 32

दर्शविते. म्हणजेच, श्रेढीच्या बेरजेची दुप्पट ABGE या काटकोन चौकोनाच्या क्षेत्रफळाइतकी असते, याचाच अर्थ असा की

$$(AC + CE) \times AB.$$

परंतु AC+CE श्रेढीच्या पहिल्या आणि पाचव्या पदांची बेरीज दर्शविते; AB – श्रेढीतील पदांची संख्या. म्हणून बेरजेची दुप्पट

$$2S = (\text{कडेवरील पदांची बेरीज}) \times (\text{पदांची संख्या})$$

किंवा

$$S = \frac{(\text{पहिले} + \text{शेवटचे पद}) \times (\text{पदांची संख्या})}{2}$$

मळयाला पाणी

प्रश्न :

एका मळयामध्ये 16 मीटर लांबी आणि 2.5 मीटर रुंदी असलेले 30 वाफे आहेत. वाफ्यांना पाणी घालण्यासाठी शेतकरी मळयाच्या कडेपासून 14 मीटर अंतरावर असलेल्या विहिरीतून बादलीमधून पाणी घेऊन येतो (चित्र 33 पहा). हे करत असताना तो वाफ्यांच्या बाजूने चालत जातो व शिवाय एका वेळी आणलेले पाणी केवळ एकाच वाफ्याला पुरेसे असते.



आकृती 33

संपूर्ण मळ्याला पाणी घालण्यासाठी शेतकऱ्याला किती अंतर चालावे लागते? विहिरीपासून त्याच्या मार्गाला सुरुवात होते व परत विहिरीजवळ त्याचा मार्ग समाप्त होतो.

उत्तर :

पहिल्या वाफ्याला पाणी घालण्यासाठी शेतकऱ्याने एकूण

$$14+16+2.5+16+2.5+14=65$$

मीटर अंतर चालले पाहिजे.

दुसऱ्या वाफ्याला पाणी घालण्यासाठी तो

$$14+2.5+16+2.5+16+2.5+2.5+14=65+5=70$$

मीटर चालतो.

यापुढील प्रत्येक वाफ्याला पाणी घालण्यासाठी त्याला 5 मीटर अधिक अंतर चालावे लागते. यावरून आपण पुढील श्रेढी मांडू शकतो :

$$65;\ 70;\ 75, \dots;\ 65+5\times 29.$$

तिच्या पदांची एकूण किंमत

$$\frac{(65+65+29\times 5)30}{2}=4\,125 \text{ मीटर}.$$

सर्व वाफ्यांना पाणी घालण्यासाठी शेतकरी एकूण 4125 मीटर अंतर चालतो.

कोंबड्यांना खाद्य

प्रश्न :

31 कोंबड्यांसाठी प्रत्येकी आठवड्यास 10 डेकालिटर या हिशोबाने काही खाद्यान्नाचा साठा करण्यात आला आहे. असे गृहीत

धरण्यात आले होते की त्यांच्या संख्येत बदल होणार नाही. परंतु प्रत्यक्षात मात्र दर आठवडयास त्यांच्यामध्ये 1 ने घट होत गेली, तर खाद्यान्नाचा कोठा पूर्वी समजल्यापेक्षा दुप्पट काळ पुरला.

खाद्यान्नाचा कोठा किती होता आणि किती काळ तो पुरेल अशी अपेक्षा होती?

उत्तर:

x डेकालीटर खाद्यान्नाचा y आठवडयांसाठी साठा करण्यात आला होता असे गृहीत धरू. ज्याअर्थी प्रत्येक कोंबडीस आठवडयास एक डेकालीटर या हिशोबाने 31 कोंबडयांसाठी खाद्यान्न साठविण्यात आले होते त्या अर्थी

$$x=31\,y.$$

पहिल्या आठवडयात 31 डेकालीटर खाद्यान्न खर्च करण्यात आले, दुसऱ्या आठवडयात 30, तिसऱ्या आठवडयात 29 डेकालीटर इ. इ. असे दुप्पट कालखंडाच्या शेवटच्या आठवडयापर्यंत, जेव्हा

$(31-2y+1)$ डेकालीटर *

खाद्यान्न खर्च करण्यात आले.

त्या अर्थी खाद्यान्नाचा एकूण साठा होता

$$x=31\,y=31+30+29+\ldots+(31-2\,y+1).$$

---

* ध्यानात घ्या:

पहिल्या आठवडयात	31 डेकालीटर खाद्यान्न खर्च झाले,			
दुसऱ्या »	$31-1$	»	»	»
तिसऱ्या »	$31-2$	»	»	»

. . . .

2y आठवडयात $31-(2y-1)=31-2y+1$ डेकालीटर खाद्यान्न खर्च झाले.

ज्या श्रेढीचे पहिले पद 31 आणि शेवटचे पद $31-2y+1$ आहे अशा श्रेढीच्या 2y पदांची किंमत असेल

$$31\,y=\frac{(31+31-2y+1)2y}{2}=(63-2y)\,y.$$

ज्या अर्थी y ची किंमत शून्य असू शकणार नाही त्या अर्थी आपण हा गुणक वगळू शकतो. तेव्हा आपणाला आढळून येईल की

$$31=63-2y \text{ आणि } y=16$$

त्या अर्थी

$$x=31y=496.$$

16 आठवड्यांसाठी 496 डेकालीटर (4960 लीटर) खाद्यान्न साठवून ठेवण्यात आले होते.

खोदकाम

प्रश्न :

वरच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांनी शाळेच्या शेतामध्ये सांडपाणी वाहून नेणारी मोरी खोदण्याचे ठरविले व त्यानुसार या कामात भाग घेऊ इच्छिणाऱ्यांचा गट बनविला. जर संपूर्ण गटाने काम केले असते तर 24 तासामध्ये हे खोदकाम पुरे झाले असते. परंतु प्रत्यक्षात मात्र सुरुवातीस या गटातील फक्त एका सदस्यानेच काम करावयास सुरुवात केली. काही वेळाने दुसऱ्या सदस्याने त्याला साथ दिली आणखी काही वेळाने (तेवढ्याच वेळाने) तिसरा सदस्य काम करू लागला. तितक्याच कालांतराने चौथा विद्यार्थी त्यांना येऊन मिळाला अशा प्रकारे ठराविक कालांतराने एक एक करून सारेजण काम करू लागले. शेवटी हिशेब केला असता असे आढळले की गटातील पहिल्या सदस्याने शेवटच्या सदस्याच्या तुलनेने 11 पट जास्त वेळ काम केले.

तर शेवटच्या सदस्याने किती वेळ काम केले?

उत्तर :

असे समजू की गटातील शेवटच्या सदस्याने x तास काम केले, म्हणजे पहिल्या सदस्याने 11x तास काम केले. पुढे गटातील सदस्यांची एकूण संख्या y होती असे मानल्यास जिचे पहिले पद 11x आहे व शेवटचे पद x आहे अशा उतरत्या श्रेढीतील y सदस्यांची बेरीज म्हणजेच एकूण कामाचे तास, म्हणजेच,

$$\frac{(11x+x)\,y}{2}=6\,xy.$$

दुसरीकडून पाहता आपणाला हे ठाऊक आहे की जर गटातील सर्वच्या सर्व y सदस्यांनी पूर्णपणे काम केले असते तर 24 तासात त्यांनी खोदकाम पुरे केले असते, म्हणजेच काम पुरे करण्यासाठी एकूण 24y श्रम-तासांची आवश्यकता होती.

त्या अर्थी

$$6\,xy=24\,y.$$

y ची किंमत शून्य असू शकत नाही; म्हणून आपण वरील समीकरणातून हा गुणक वगळू शकतो, परिणामी :

$$6\,x=24$$

आणि

$$x=4$$

अशा प्रकारे सर्वात शेवटी काम करावयास सुरुवात केलेल्या विद्यार्थ्याने 4 तास खोदकाम केले.

कोडे तर आपण सोडविले परंतु जर आपण या गटात किती विद्यार्थी होते हे जाणून घेण्याचा प्रयत्न केला तर आपला हा प्रयत्न निष्फळ ठरेल मग जरी समीकरणामध्ये y ही राशी आपणाला भाग घेत असल्याचे दिसत असले तरीही. या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी आवश्यक ती सारी माहिती या कोड्यात देण्यात आलेली नाही.

सफरचंदे

प्रश्न :

एका बागवानाने पहिल्याच ग्राहकाला आपल्या जवळची निम्मी सफरचंदे व आणखी एक अर्धे सफरचंद विकले, दुसऱ्या ग्राहकाला त्याने शिल्लक राहिलेल्या सफरचंदांपैकी निम्मी सफरचंदे व एक अर्धे सफरचंद विकले. अशाच प्रकारे तिसऱ्या ग्राहकाला त्याने बाकीपैकी निम्मी सफरचंदे व एक अर्धे सफरचंद विकले इ. पुढे सातव्या ग्राहकाला-देखील त्याने बाकीपैकी निम्मी व एक अर्धे सफरचंद विकले. त्यानंतर त्याच्या जवळची सारी सफरचंदे संपली, तर बागवानाकडे किती सफरचंदे होती ?

उत्तर :

सुरुवातीला x सफरचंदे होती असे मानल्यास पहिल्या ग्राहकास

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

दुसऱ्या ग्राहकास

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

तिसऱ्या ग्राहकास

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

तर सातव्या ग्राहकास

$$\frac{x+1}{2^7}$$

सफरचंदे विकली गेली.

अशा रीतीने आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होते :

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

किंवा

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x$$

कंसातील गुणोत्तर श्रेढी (गुणश्रेढी) सोडविल्यास :

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

आणि

$$x=2^7-1=127.$$

म्हणजेच एकूण 127 सफरचंदे होती.

घोड्यांची खरेदी

मग्नित्स्की यांच्या प्राचीन अंकगणिताच्या पुस्तकामध्ये एक कोडे आहे जे आम्ही पुढे देत आहोत. अर्थात आम्ही मूळ भाषा मात्र बदलली आहे :

एकाने 156 रूबलला आपला घोडा विकला. परंतु घोडा विकत घेण्यास आलेल्या ग्राहकाचा विचार बदलला आणि त्याने तो घोडा त्याच्या मालकास परत केला :

"या किंमतीस घोडा खरेदी करण्याची माझी मुळीच ऐपत नाही, या किंमतीलायक हा घोडा नाहीच नाही," –तो म्हणाला.

तेव्हा विक्रेत्याने दुसरा सौदा पुढे केला :

"जर तुला वाटत असेल की घोड्याची किंमत फार आहे, तर तू त्याच्या फक्त नालांचे खिळे खरेदी कर मग घोडा तुला फुकटात पडेल. प्रत्येक नालेत 6 खिळे आहेत. पहिल्या खिळयासाठी मला फक्त $\frac{1}{4}$ कोपेक दे, दुसऱ्यासाठी $\frac{1}{2}$, तिसऱ्यासाठी 1 कोपेक इ.

इतकी काडीमोल किंमत पाहून फुकट घोडा पदरात पाडून घेण्याच्या आशेने ग्राहकाने हा सौदा कबूल केला. त्याला वाटले अशा प्रकारे जास्तीत जास्त दहा रुबलमध्ये घोडा पडेल.

ग्राहकाला हा घोडा केवढ्याला पडत होता?

उत्तर :

24 खिळयांसाठी

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{24-3}$$

कोपेक द्यावे लागले असते. म्हणजेच एकूण

$$\frac{2^{12}\times2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4\,194\,303\frac{3}{4} \text{ कोपेक},$$

म्हणजे जवळ जवळ 42 हजार रुबल या घोड्यासाठी मोजावे लागले असते. सौदा मान्य असेल तर मग फुकटात घोडा द्यायला काहीच हरकत नाही.

सैनिकाचा बहुमान

1795 सालातील अशाच एका जुन्या गणिताच्या पुस्तकात पुढील कोडे आहे:

"युद्धात भाग घेतलेल्या एका सैनिकाला पहिल्या जखमेसाठी 1 कोपेक, दुसऱ्या जखमेसाठी 2 कोपेक, तिसऱ्यासाठी 4 कोपेक इ. इ. अशा प्रकारे भरपाई देण्यात आली. हिशेब मांडला असता असे आढळून आले की त्याला एकूण 655 रुबल 35 कोपेकची रक्कम मिळाली. तर त्याला किती जखमा झाल्या होत्या?

उत्तर :

पुढील समीकरण आपणाला मांडावे लागेल:

$$65535=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{x-1}$$

किंवा

$$65535 = \frac{2^{x-1} \times 2 - 1}{2-1} = 2^x - 1$$

ज्यावरून :

$$65535 = 2^x \text{ आणि } x = 16$$

–प्रत्यक्ष अनुभवाने उत्तर तपासून पाहता येईल.

एवढी मोठी रक्कम प्राप्त करण्यासाठी सैनिकाला 16 जखमा करून घ्याव्या लागत असत आणि त्यानंतर ही रक्कम मिळविण्यासाठी जिवंतही रहावे लागत असे.

प्रकरण 9

सातवा गणिती संस्कार

सातवा संस्कार

यापूर्वी आम्ही उल्लेख केलाच आहे की पाचव्या गणिती क्रियेला – घातकरणाला – दोन प्रतिक्रिया आहेत. जर

$$a^b = c,$$

असेल तर a ची किंमत शोधून काढणे म्हणजेच मूळ शोधून काढणे ही झाली पहिली क्रिया तर b ची किंमत शोधून काढणे म्हणजेच a वर आधारलेले लॉगरिथम शोधून काढणे ही दुसरी क्रिया आहे. आमच्या वाचकांनी यापूर्वी लॉगरिथम कोष्टकांचा सर्वसाधारण, शालेय अभ्यास केलेला असावा अशी आशा आहे. त्यांना, उदाहरणार्थ पुढील राशीची किंमत काय होते याची कल्पना असावीच :

$$a^{\log_a b}$$

हे अगदी स्पष्टच आहे की जर a या लॉगच्या पायाचा b या संख्येच्या लॉग इतका घात केला तर b ही संख्या प्राप्त होईल.

लॉगरिथम कोष्टकांची रचना का करण्यात आली होती? अर्थातच गणितीय प्रक्रियांना अधिक सुलभ बनविण्यासाठी व त्यांची चट्कन सोडवणूक करण्यासाठी. प्रारंभीच्या लॉगरिथम कोष्टकांचा जनक नेपरने म्हटले आहे :

"किचकट आणि कंटाळवाण्या हिशेबांपासून, ज्यांचा अवाढव्यपणा गणिताचा अभ्यास करू इच्छिणाऱ्यांच्या मनात भीती निर्माण करतो, सुटका करून घेण्यासाठी मी जें काही शक्य होते ते सारे काही केले आहे."

खरोखरच, लॉगरिथम कोष्टकांच्या मदतीमुळे गणितीय क्रिया अत्यंत सुलभ होतात व कोणत्याही घातीय फलाचे मूळ काढण्याच्या क्रियेसारख्या अत्यंत कठीण व गुंतागुंतीच्या क्रिया पार पाडणे शक्य होते. लॉगरिथम कोष्टकांची जर मदत नसेल तर या क्रिया पार पाडणे एक दिव्य कर्मच ठरेल.

लाप्लासने यथायोग्यपणेच म्हटले आहे की "अंकांच्या हिशेबांवर खर्च होणाऱ्या वेळेमध्ये महिन्यांनी आणि दिवसांनी घट करून लॉगरिथमच्या शोधाने खगोलशास्त्रज्ञांच्या जीवनात शब्दश: वृद्धी केली आहे." हा महान गणितशास्त्रज्ञ खगोलशास्त्रज्ञांविषयी बोलतो कारण खगोलशास्त्रज्ञांना अत्यंत दीर्घ आणि किचकट हिशेबांशी दोन हात करावे लागतात. परंतु हे शब्द अवजड आणि कंटाळवाणे हिशेब मांडणाऱ्या सर्वांनाच लागू पडतात.

लॉगरिथम कोष्टकांचा वापर करण्याची आणि त्यामुळे मिळणारा फायदा उठविण्याची सवय अंगवळणी पडलेल्या आपणाला या कोष्टकांनी त्या काळात निर्माण केलेल्या उत्साहाची आणि आश्चर्याची कल्पना येणार नाही. आधारांक 10 असलेल्या लॉगरिथमचे जनक व निपेरचे समकालीन ब्रिगनी निपेरचा निबंध हाती पडताच लिहिले:

"आपल्या नव्या आणि आश्चर्यजनक लॉगरिथम कोष्टकांनी निपेरनी मला आणखी जोमाने, डोक्याने आणि हातांनी काम करावयास भाग पाडले आहे. उन्हाळयामध्ये मी त्यांना भेटेन अशी आशा आहे."

ब्रिगनी आपला बेत तडीस नेला व लॉगरिथमच्या जनकाची भेट घेण्यासाठी त्यांनी स्कॉटलंडला प्रयाण केले. निपेरशी भेट झाल्यावर ते म्हणाले:

"केवळ आपली भेट घेण्यासाठी आणि खगोलशास्त्रज्ञ ज्या बुद्धिवंत आणि कलात्मक शस्त्राच्या साहाय्याने आपल्या मदतनिसाची स्वप्ने रंगवित आहेत त्या लॉगरिथमविषयी जाणून घेण्यासाठी मी इतके अंतर पार करून आलो आहे. खरे पाहता, आता मला या गोष्टीचे फारच आश्चर्य वाटू लागले आहे की यापूर्वी कोणीही त्यांचा शोध का लावला नाही. ही कोष्टके पाहिली असता त्यांचा सरळ सोपेपणा पाहून नवल वाटते."

लॉगरिथमचे प्रतिस्पर्धी

लॉगरिथम कोष्टकांच्या शोधापूर्वी हिशेब मांडण्यासाठी अगदी दुसऱ्याच प्रकारच्या कोष्टकांचा वापर केला जात असे. या कोष्टकांचे वैशिष्टय असे होते की गुणाकाराच्या बदली बेरीज करण्याऐवजी वजा-बाकी करावी लागत असे. पुढील एकरूप समीकरणावर हे कोष्टक आधारीत होते.

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

यातील कंस सोडविले असता हे समीकरण अचूक असल्याचे आपणाला आढळून येईल.

वर्गांचा चतुर्थांश तयार मिळत असल्याने गुणाकार न करता या संख्यांच्या बेरजेच्या वर्गाच्या चतुर्थांशामधून त्यांच्यामधील फरकांचा चतुर्थांश वजा केला असता दोन संख्यांच्या गुणाकाराचे फल प्राप्त होते. याच कोष्टकांच्या साहाय्याने एखाद्या संख्येचा वर्ग किंवा वर्गमुळ काढता येते तर उलट संख्यांच्या कोष्टकाच्या साहाय्याने भागाकार करता येतो. लॉगरिथम कोष्टकांच्या तुलनेत सदर कोष्टकांचा फायदा हा की त्यांच्या मदतीने अचूक उत्तर प्राप्त होते, अंदाजी नाही. पण लॉगरिथम कोष्टकांच्या इतर काही महत्त्वाच्या वैशिष्टचांपुढे मात्र त्यांना हार खावी लागते. वर्गांच्या चतुर्थांशांची कोष्टके केवळ दोनच संख्यांचा गुणाकार सुलभ करतात तर लॉगरिथम कोष्टके एकाच वेळी कोणत्याही संख्येतील गुणकांचा गुणाकार सुलभ बनवितात आणि याशिवाय त्याच्या मदतीने संख्येचा कोणाताही घात घेता येतो व संख्येचे कोणतेही मूळ (पूर्णांकी किंवा अपूर्णांकी) काढता येते. वर्गांच्या चतुर्थांशांच्या कोष्ट-कांच्या साहाय्याने उदाहरणार्थ, कठीण टक्केवारी काढता येत नाही.

तथापि सर्व प्रकाराची लॉगरिथम कोष्टके प्रचारात आल्यानंतरही वर्गांच्या चतुर्थांशांची कोष्टके प्रसिद्ध होत होतीच. 1856 मध्ये फ्रान्स येथे पुढील शिर्षकाखाली कोष्टके प्रसिद्ध करण्यात आली:

"1 पासून 1000 दशलक्ष संख्यांच्या वर्गांचे कोष्टक, ज्यांच्या मदतीने लॉगरिथम कोष्टकापेक्षाही अधिक सुलभरित्या संख्यांचा अचूक

गुणाकार करता येतो. कोष्टकांचा निर्माता अलेक्झांडर कोस्सार."

अशा प्रकारची कोष्टके तयार करण्याचा विचार अनेकांच्या मनात येतो खरा पण त्या लोकांना या गोष्टीची मुळीच शंका येत नाही की या पूर्वीच हा विचार प्रत्यक्षात उतरविण्यात आला आहे. दोनदा माझ्याकडे असे काही लोक आले ज्यांचा दावा होता की त्यांनी ही कोष्टके तयार केली आहेत पण मी जेव्हा त्यांना सांगितले की ही कोष्टके तीनशे वर्षांपूर्वीच निर्माण झालेली आहेत तेव्हा मात्र त्यांना आश्चर्याचा धक्का बसला.

लॉगरिथम कोष्टकांचा आणखी एक प्रतिस्पर्धी म्हणजे गणन कोष्टके. या कोष्टकांमध्ये पुढील गोष्टींचा समावेश असतो: 2 पासून 1000 पर्यंतच्या संख्यांचे वर्ग, वर्गमुळे, घनमुळे, उलट संख्या, परिघाची लांबी आणि वर्तुळांची क्षेत्रफळे. अनेक तांत्रिक हिशोबांसाठी या कोष्टकांचा फार उपयोग होतो, तथापि त्यांची मदत अनेकदा अपुरी पडते: लॉगरिथम कोष्टकांचा अधिक व्यापक प्रमाणावर अनेक क्षेत्रामधून यशस्वीरित्या वापर होऊ शकतो.

लॉगरिथम कोष्टकांची उत्क्रांती

आपल्या शाळांमधून अगदी अलीकडेच तीन अंकी लॉगरिथम कोष्टकांचा वापर सुरू झाला आहे. आता तर चार अंकी लॉगरिथम कोष्टके वापरली जाऊ लागली आहेत कारण तांत्रिक गणना करण्यासाठी त्यांची मदत पुरेशी आहे. परंतु खरे पाहता आपल्या नित्या व्यवहारामध्ये कराव्या लागणाऱ्या हिशेबांसाठी तीन अंकी कोष्टकेच पुरेशी आहेत.

अधिक छोटया अपूर्णांकांच्या पुरेशापणासंबंधीचा विचार अलीकडेच मांडण्यात आला आहे. मला अजूनही ते दिवस आठवतात जेव्हा आपल्या शाळांमधून सात अंकी लॉगरिथम कोष्टके वापरली जात होती आणि नंतर बऱ्याच लढ्यानंतर त्यांची जागा पाच अंकी लॉगरिथमनी घेतली. तथापि सात अंकी लॉगरिथम कोष्टकेदेखील त्यांचा उगम जेव्हा झाला (1794) तेव्हा नाविन्यपूर्णच ठरली होती. सुरुवातीस हेन्री ब्रिग (1624) या लंडन येथील गणितज्ञाने तयार केलेली लॉगरिथम कोष्टके

चौदा अंकी होती. काही वर्षांनंतर हॉलंडस्चा गणितज्ञ आंद्रिआन व्लाक्क यांच्या दहा अंकी कोष्टकांनी त्यांची जागा घेतली.

यावरून आपणाला दिसून येते की लॉगरिथम कोष्टकांच्या उत्क्रांती काळात मोठ्या अपूर्णांकांकडून छोट्या अपूर्णांकांकडे हळूहळू संक्रमण होत गेले. ही क्रिया अद्यापीही चालूच आहे कारण अचूक मोजमापापेक्षा अचूक हिशेब वरचढ असू शकत नाही हा विचार अद्यापीही अनेकांना मान्य नाही.

अपूर्णांकाच्या "लांबी"मध्ये होणाऱ्या घटीमुळे दोन व्यावहारिक-दृष्ट्या महत्त्वाचे परिणाम घडून येतात: 1) कोष्टकांच्या आकारमानात होणारी महत्त्वपूर्ण घट आणि 2) या गोष्टीचाच परिणाम म्हणून हिशोबांमध्ये येणारी सुलभता. सात अंकी लॉगरिथम कोष्टके मोठ्या आकाराची जवळजवळ 200 पाने व्यापतात, 5 अंकी लॉगरिथम कोष्टके याहून निम्म्या आकाराची 30 पाने, 4 अंकी लॉगरिथम कोष्टके याहून दहा पट कमी आकाराची पाने व्यापतात तर तीन अंकी लॉगरिथम कोष्टके एकाच पानावर मावू शकतात.

किती जलद गतीने हिशेब करता येतात हे जर पहावयाचे झाले तर असे सिद्ध करण्यात आले आहे की, उदाहरणार्थ, 7 अंकी लॉगरिथम कोष्टकांच्या साहाय्याने हिशेब करण्यास जितका वेळ लागतो त्याहून तीन पट कमी वेळ 5 अंकी लॉगरिथम कोष्टकांच्या मदतीने हिशेब करण्यास लागतो.

लॉगरिथमची आश्चर्ये

जर 3 आणि 4 अंकी लॉगरिथम कोष्टके आपल्या व्यावहारिक आणि तांत्रिक जीवनातील आवश्यक हिशेबांची सोडवणूक करण्याच्या दृष्टीने पुरेशी सहाय्यक असतील तर दुसरीकडून सैद्धांतिक संशोधनाच्या कामी अधिक अंकी, कधी कधी 14 अंकी ब्रिगच्या लॉगरिथम कोष्ट-कांची मदत घेतली जाते. एकंदरीत पाहता, बहुतेक बाबतीत लॉगरिथम म्हणजे अकल्य संख्या असतात आणि म्हणून अचूकरित्या संख्येमध्ये त्यांची मांडणी करता येत नाही; कितीही अंक विचारात घेतले तरीही बहुतेक

संख्यांचे लॉगरिथम केवळ नजिकच्या संख्येमधूनच व्यक्त करता येतात – त्यांच्या लॉगभिन्नमध्ये जितके जास्त अंक असतील तितका त्यांचा लॉगरिथम अचूक असतो. वैज्ञानिक संशोधनामध्ये कधी कधी 14 अंकी लॉगरिथम संख्यांची आवश्यकता पुरेशी असते * परंतु लॉगरिथम कोष्टकांचा शोध लागल्यापासूनच्या काळातील 500 विभिन्न लॉगरिथम कोष्टकांमधून संशोधक त्याला आवश्यक असणाऱ्या अशा एका तरी कोष्टकाची सहज निवड करू शकतो. फ्रान्समध्ये 1795 साली प्रसिद्ध करण्यात आलेल्या 2 ते 1200 संख्यांच्या 20 अंकी लॉगरिथम कोष्टकांचा आपण उल्लेख करू शकतो. याहूनही अधिक मर्यादित संख्यासाठी लॉगरिथम कोष्टके उपलब्ध आहेत. लॉगरिथम कोष्टकांच्या अनेक आश्चर्यांची मला साक्ष पटलेली आहे; अनेक गणितज्ञांना त्यांच्या अस्तित्वांचीही काडीमात्र कल्पना नाही.

काही नैसर्गिक ** लॉगरिथम कोष्टके पुढीलप्रमाणे आहेत:

10000 पर्यंतच्या संख्यासाठी वोल्फ्रामची 48 अंकी कोष्टके;

शार्यची 61 अंकी कोष्टके;

पार्कहेर्स्टची 102 अंकी कोष्टके आणि शेवटी लॉगरिथम कोष्टकांचे महान आश्चर्य:

ॲडम्सची 260 अंकी लॉगरिथम कोष्टके.

शेवटी लॉगरिथमे ही कोष्टकांच्या स्वरूपात नाहीत तर 2, 3, 5, 7 आणि 10 या संख्यांचे तथाकथित नैसर्गिक लॉगरिथम आहेत आणि त्यांच्या रूपांतर गुणकांचा (260 अंकी) देखील त्यामध्ये समावेश आहे. ही गोष्ट सहजगत्या ध्यानात येईल की जर या पाच संख्यांचे लॉगरिथम उपलब्ध असतील तर साध्या बेरजेच्या किंवा गुणाकाराच्या साहाय्याने अनेक विभाज्य संख्यांचे लॉगरिथम मिळविता येतात;

---

* फक्त 1 ते 20000 आणि 90000 ते 101000 या संख्यांचेच 14 अंकी ब्रिग लॉगरिथम उपलब्ध आहेत.

** नैसर्गिक लॉगरिथमे अशा लॉगरिथमना म्हणतात, ज्यांचा आधार 10 नसतो तर 2718 असतो... या विषयाकडे आपण पुन्हा एकदा वळणार आहोत.

उदाहरणार्थ 12 या संख्येचा लॉगरिथम म्हणजे 2, 2 आणि 3 या संख्यांच्या लॉगरिथमची बेरीज इ. इ.

रंगमंचावर लॉगरिथम

व्यावसायिक गणक-कलाकारांनी प्रेक्षकांपुढे सादर केलेल्या खेळांपैकी सर्वात आश्चर्यजनक खेळ निःसंशयपणे पुढील आहे: 'कोणत्याही मोठ्या घातीय फलाचे मूळ गणक-कलाकार शोधून काढेल' या जाहीरातीला उत्तर म्हणून तुम्ही घरी एखाद्या संख्येचे 31 वे घातीय फल काढता आणि या कलाकाराशी दोन हात करावयास सिद्ध होता. ठराविक क्षणाला तुम्ही गणक-कलाकाराला प्रश्न विचारता:

"पुढील 35 अंकी संख्येचे 31 वे मूळ काढून दाखवा बरे! लिहून घ्या, मी संख्या सांगतो."

गणक-कलाकार हातात खडू घेतो, परंतु तुम्ही संख्या सांगता ना सांगता तोच तो फळ्यावर उत्तर लिहून मोकळा होतो.

संख्या ठाऊक नसताना देखील तो त्या संख्येचे मूळ काढ़तो आणि ते देखील 31 वे, शिवाय क्षणार्धात! ..

तुम्हाला आश्चर्याचा धक्का बसतो, तुमची सारी योजना धुळीस मिळालेली असते पण यात महान आश्चर्य असे काहीच नाही. जिचा 31 वा घात 35 अंकी संख्या असतो अशी एकच संख्या आहे व ती म्हणजे 13.

13 पेक्षा लहान संख्यांचा 31 वा घात 35 अंकी संख्येपेक्षा लहान असतो तर 13 पेक्षा मोठ्या संख्येचा मोठा.

गणकाला हे कसे काय ठाऊक झाले? त्याने 13 ही संख्या कशी काय शोधून काढली? त्याला मदत केली ती लॉगरिथमने, दोन अंकी लॉगरिथमने जे त्याला पहिल्या 15=20 संख्यांच्या बाबतीत तोंडपाठ आहेत. हे लॉगरिथम ध्यानात ठेवणे तसे मुळीच कठीण नाही. विभाज्य संख्येचा लॉगरिथम तिच्या सर्वसामान्य गुणकांच्या लॉगरिथमांच्या बेर-

जेइतका असतो. जर 2, 3 आणि 7* या संख्यांचे लॉगरिथम आपणाला चांगल्या रीतीने ठाऊक असतील तर पहिल्या दहा संख्यांचे लॉगरिथम आपणाला ठाऊक आहेत असे समजावयास हरकत नाही, पुढील दहा संख्यांचे लॉगरिथम जाणून घेण्यासाठी आणखी चार संख्यांचे लॉगरिथम ठाऊक असावयास हवेत.

काही झाले तरी गणक-कलाकाराला पुढील दोन अंकी लॉगरिथम कोष्टक ठाऊक असते :

संख्या	लॉग.	संख्या	लॉग.
2	0.30	11	1.04
3	0.48	12	1.08
4	0.60	13	1.11
5	0.70	14	1.15
6	0.78	15	1.18
7	0.85	16	1.20
8	0,90	17	1.23
9	0.95	18	1.26
		19	1,28

आपणाला जिचे आश्चर्य वाटले ती गणिती जादू पुढीलप्रमाणे व्यक्त करता येईल :

$$\log \sqrt[31]{(35 \text{ अंक})} = \frac{34 \ldots}{31} .$$

आपणाला हवे असलेले लॉगरिथमीय फल :

$$\frac{34}{31} \text{ आणि } \frac{34.99}{31} \text{ किंवा } 1.09 \text{ आणि } 1.13$$

* आपल्या ध्यानात असेलच $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2.$

यांच्या दरम्यान असेल. आणि त्यांच्या दरम्यान फक्त एकाच पूर्ण संख्येचा लॉगरिथम – 1.11 म्हणजेच 13 या संख्येचा लॉगरिथम आहे. अशा प्रकारे आपणाला धक्का दिलेली ही संख्या शोधून काढण्यात आली. अर्थात मनातल्या मनात हा सारा काही हिशोब मांडण्यासाठी उत्कृष्ट सराव आणि व्यवसायिक पूर्वतयारी असावयास हवी. पण आपणाला दिसून आले असेलच की प्रत्यक्षात मात्र हे सारे काही सरळ सोपे आहे. आपण देखील ही जादू मनातल्या मनात नाही तर निदान कागदावर तरी करून दाखवू शकाल.

असे समजू की एका 20 अंकी संख्येचे 64 वे मूळ आपणाला काढावयास सांगितले आहे. ही संख्या काय आहे हे ऐकण्यापूर्वीच आपण तिचे 64 वे मूळ सांगता =2,

प्रत्यक्षात $\log \sqrt[64]{(20 \text{ अंक})} = \frac{19\ldots}{64}$; म्हणजेच हे लॉगरिथमीय फल $\frac{19}{64}$ आणि $\frac{19.99}{64}$ म्हणजेच 0,29 आणि 0,32 यांच्या दरम्यानचे असले पाहिजे. पूर्ण संख्येच्या बाबतीत हे फल केवळ एकच आहे: 0,30 ... म्हणजेच 2 या संख्येचे लॉगरिथमीय फल.

आपण प्रश्न मांडणाऱ्याला तो जी संख्या सांगणार आहे तीच सांगून आणखी एक आश्चर्याचा धक्का देऊ शकता: ही संख्या आहे:

$$2^{64} = 18446744073709551616.$$

पशुसंवर्धन केंद्रामध्ये लॉगरिथम

प्रश्न :

तथाकथित "पूरक" वैरण (म्हणजे शरीराद्वारे खर्च करण्यात आलेली ऊर्जा भरून काढण्यासाठी आणि मृत्यू पावणाऱ्या पेशींची पुनर्स्थापना करण्यासाठी इ. प्राण्याला आवश्यक असणारे कमीत कमी खाद्य) प्राण्याच्या शरीराच्या बाह्यस्वरूपाच्या प्रमाणात आहे. हे ठाऊक असताना, ज्या परिस्थितीत 630 कि. ग्रॅ. वजनाच्या बैलाला 13500 कॅलरी आवश्यक असेल तर त्याच परिस्थितीत 420 कि. ग्रॅ. वजना-

च्या बैलाला आवश्यक असणाऱ्या पूरक वैरणीपासून किती कॅलरी ऊर्जा प्राप्त होते ?

उत्तर :

पशुकेंद्राशी संबंधीत असलेल्या या प्रश्नाचे उत्तर शोधून काढण्यासाठी आपणाला बीजगणिताव्यतिरिक्त भूमितीची मदत घ्यावी लागेल. प्रश्नातील अटीनुसार आपणाला आवश्यक असलेली कॅलरी x आहे. ती बैलाच्या S पृष्ठभागाशी प्रमाणात आहे, म्हणजेच

$$\frac{x}{13500}=\frac{S}{S_1},$$

जेथे $S_1=630$ कि. ग्रॅ. वजनाच्या बैलाच्या शरीराचा पृष्ठभाग. भूमितीशास्त्रामध्ये आपणाला ठाऊक आहे की अशा प्रकारच्या शरीरांच्या बाबतीत S हा पृष्ठभाग त्यांच्या लांबीनुसार परिमाणांचा (l) वर्ग असतो तर आकारमान (आणि परिणामी वजन) लांबीनुसार परिमाणांचा घन असतो. म्हणून

$$\frac{S}{S_1}=\frac{l^2}{l_1^2},\quad \frac{420}{630}=\frac{l^3}{l_1^3},$$

$$\text{आणि याचा अर्थ } \frac{l}{l_1}=\frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}}$$

ज्यावरून

$$\frac{x}{13500}=\frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

$$x=13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

लॉगरिथम कोष्टकांच्या मदतीने आपणाला x ची किंमत काढता येईल :

$$x=10\,300$$

बैलाला 10300 कॅलरींची आवश्यकता आहे.

संगीतामध्ये लॉगरिथम

संगीतकार क्वचित्‌च गणिताच्या बाबतीत आस्था दाखवितात, त्यांच्यापैकी बहुसंख्यजण या शास्त्राचा आदर राखून त्यापासून शक्यतो दूर राहण्याचा प्रयत्न करतात. परंतु त्यांना ठाऊक नसते की त्यांना वाटते त्यापेक्षा बहुसंख्य वेळा गणिताशी आणि तो सुद्धा लॉगरिथम सारख्या 'भयंकर' प्रकाराशी संबंध येत असतो.

या संबंधात मी आपले दिवंगत भौतिकशास्त्रज्ञ प्राध्यापक ए. आयख-नवाल्ड यांच्या एका लेखातील उतारा उद्‌धृत करतो.*

"माझ्या एका शालेय मित्राला पियानो वाजवण्याची आवड होती पण गणिताच्या बाबतीत मात्र त्याला तिटकारा होता. तो नेहमी ठाम-पणे प्रतिपादन करीत असे की संगीत आणि गणिताच्या दरम्यान मुळीच संबंध नाही. "हां, हे खरे की स्वर-आंदोलनांच्या बाबतीत पायथागोर-सला काही संबंध आढळून आला—परंतु आमच्या संगीताच्या बाबतीत पायथागोरसची श्रेणी मुळीच उपयोगाची नाही असे सिद्ध झाले आहे."

आधुनिक पियानो वाजवित असताना प्रत्यक्षात तो लॉगरिथमच्या पट्टचांवरून हात फिरवीत असतो हे जेव्हा मी त्याला दाखवून दिले तेव्हा त्याची किती घोर निराशा झाली असेल याची कल्पनाच केलेली बरी... आणि खरोखरच, स्वराची तीव्रता वाढविणाऱ्या वरच्या "पट्टी"तील सुरांची मांडणी आंदोलन संख्येनुसार किंवा संबंधीत ध्वनी तरंगांच्या लांबीनुसार समान अंतरावर करण्यात आलेली नसते तर या मुल्यांच्या लॉगरिथमच्या स्वरूपात ती असते. फक्त या लॉगरिथमचा पाया 10 नव्हे तर 2 असतो.

समजा 'दो' या सर्वात खालच्या स्वरामध्ये — त्याला शून्य अष्टक म्हणू—सेकंदास n आंदोलने अंतर्भूत आहेत. पहिल्या अष्टकामधील 'दो'मध्ये 2n आंदोलने असतील तर m व्या अष्टकामध्ये $n \times 2^m$

---

*हा लेख "1919 ची रशियन खगोलशास्त्रीय दिनदर्शिका" या पुस्तकात "मोठी आणि छोटी अंतरे" या शिर्षकाखाली प्रसिद्ध झाला होता.

आंदोलने असतील इ. पियानोच्या वर्णीय श्रेणीतील सर्व स्वरांना, प्रत्येक अष्टकातील मूलभूत स्वर 'दो' शून्य आहे असे समजून P या क्रमांकांनी व्यक्त करू. असे असेल तर, उदाहरणार्थ, 'सोल' स्वर 5 वा असेल, 'ला' 7 वा असेल इ. 12 वा स्वर पुन्हा 'दो' असेल, पण तो वरच्या पट्टीतला. ज्या अर्थी तीव्र होत जाणाऱ्या वर्णीय श्रेणी-मधील प्रत्येक स्वरामध्ये त्या पूर्वीच्या स्वरापेक्षा $\sqrt[12]{2}$ अधिक आंदोलने असतात त्या अर्थी कोणत्याही स्वरातील आंदोलनांची संख्या पुढील सूत्रावरून काढता येईल :

$$N_{pm}=n\times 2^{m}(\sqrt[12]{2})^{p}.$$

या सुत्राचा लॉगरिथम घेतला असता

$$\log N_{pm}=\log n+m\log 2+p\frac{\log 2}{12}$$

किंवा

$$\log N_{pm}=\log n+\left(m+\frac{p}{12}\right)\log 2.$$

सर्वात खालच्या 'दो' स्वरातील आंदोलनांची संख्या एकक ($n=1$) आहे असे समजून सर्व लॉगरिथमचे रूपांतर पायामध्ये, 2 मध्ये (किंवा $\log 2=1$ असे थोडक्यात मानून) केले असता :

$$\log N_{pm}=m+\frac{p}{12}.$$

यावरून आपणाला असे दिसून येते की पियानोच्या पट्टींचे क्रमांक तद्नुरूप स्वरातील आंदोलनांच्या संख्यांच्या लॉगरिथम इतके असतात.* आपण हेदेखील सांगू शकतो की अष्टकाचा क्रमांक म्हणजे त्याच्या लॉगरिथमचा लक्षणांक (पूर्णांक) असतो तर दिलेल्या अष्टकातील स्वराचा क्रमांक** त्या लॉगरिथमचा लॉगभिन्न (अपूर्णांक) असतो.

---

* 12 ने गुणलेले.

** 12 ने भाग देण्यात आलेला.

उदाहरणार्थ तिसऱ्या अष्टकातील 'सोल' या स्वरामध्ये म्हणजेच $3+7/12(\approx 3\cdot 583)$ या संख्येमध्ये 3 ही संख्या या स्वराच्या आंदोलन संख्येच्या लॉगरिथमचा लक्षणांक आहे तर $7/12(\approx 0.583)=$ हा त्याच लॉगरिथमचा, 2 पायावरील लॉगभिन्न (अपूर्णांक) आहे, परिणामी पहिल्या अष्टकातील 'दो' स्वराच्या तुलनेने या स्वरातील आंदोलनांची संख्या $2^{3.583}$ म्हणजेच 11.98 पट अधिक आहे.

तारे गोंगाट व लॉगरिथम

तीन संपूर्णपणे वेगवेगळ्या गोष्टींसंबंधीत हे शिर्षक वाचून आपणाला बरेच आश्चर्य वाटेल पण आता आपण खरोखरच तारे आणि गोंगाट व त्यांच्याशी लॉगरिथमच्या असलेल्या दाट संबंधांवर चर्चा करणार आहोत.

गोंगाट आणि तारे या ठिकाणी एकत्र आले आहेत, कारण गोंगाटाची तीव्रता आणि ताऱ्यांची प्रकाशकता एकाच पद्धतीने – लॉगरिथमीय मापन पद्धतीने मोजतात.

पृथ्वीवरून दिसणाऱ्या ताऱ्याच्या ठळकपणाच्या आधारावर खगोलशास्त्रज्ञ ताऱ्यांची वर्गवारी 1, 2, 3 इ. प्रतीत करतात. सातत्यपूर्ण ताऱ्यांच्या प्रती आपल्या डोळ्यांच्या दृष्टीने गणित श्रेढीतील पदे असतात. परंतु त्यांचा ठळकपणा किंवा त्यांची तीव्रता ही दुसऱ्याच एका नियमाने बांधली गेलेली असते: त्यांची वस्तुनिष्ठ प्रकाशकता म्हणजे एक गुणोत्तर श्रेढी असून 2.5 हे तिचे सामान्य गुणोत्तर असते. यावरून आपल्या सहजपणे ध्यानात येईल की ताऱ्याची प्रत म्हणजे दुसरे तिसरे काही नसून तिच्या भौतिक प्रकाशकतेचा लॉगरिथम असतो. उदाहरणार्थ तिसऱ्या प्रतीचा तारा पहिल्या प्रतीच्या ताऱ्यापेक्षा 2.5^{3-1} म्हणजेच 6.25 पट अधिक ठळक असतो. थोडक्यात सांगावयाचे म्हणजे एखाद्या ताऱ्याचा ठळकपणा निश्चित करण्यासाठी खगोलशास्त्रज्ञ 2.5 या पायावर आधारीत लॉगरिथम कोष्टकांची मदत घेतात. आता या विषयावर मी येथे जास्त खोलवर चर्चा करीत नाही कारण "मनोरंजक

गोलशास्त्र" या माझ्या पुस्तकात या साऱ्या मनोरंजक गोष्टींचे मी सविस्तर विवेचन केले आहे.

अगदी अशाच प्रकारे गोंगाटाच्या तीव्रतेचे मूल्यमापन केले जाते. औद्योगिक गोंगाटाच्या कामगाराच्या आरोग्यावर व श्रम उत्पादकतेवर होणाऱ्या परिणामामुळे गोंगाटाचे आकडेवारीत अचूक मूल्यमापन करण्याची आवश्यकता निर्माण झाली. गोंगाटाच्या महत्तेचे मापन करण्यासाठी 'बेल' हे एकक वापरतात, व्यवहारात मात्र त्याचा दहावा भाग, 'डेसिबेल' हे परिमाण वापरले जाते. ध्वनीच्या तीव्रतेत सातत्यपूर्वक होत जाणारी वृद्धी – 1 बेल, 2 बेल इ. (व्यवहारात – 10 डेसिबेल, 20 डेसिबेल इ.) म्हणजे आपल्या श्रवणशक्तीच्या दृष्टीने एक समानान्तर श्रेढी असते. या गोंगाटांची भौतिक "शक्ती" (अचूकरित्या सांगावयाचे झाल्यास – ऊर्जा) म्हणजे जिचे सामान्य गुणोत्तर 10 आहे अशी गुणोत्तर श्रेढी असते. दोन ध्वनींदरम्यानचा 1 बेल इतका फरक गोंगाटाच्या 10 शक्ती इतका असतो. म्हणजेच बेलमध्ये व्यक्त करण्यात आलेली गोंगाटाची तीव्रता त्याच्या भौतिक शक्तीच्या दशांकी लॉगरिथम इतकी असते.

काही उदाहरणे घेऊ म्हणजे ही गोष्ट चांगल्या रीतीने स्पष्ट होईल.

हळूवारपणे सरसरणाऱ्या पानांच्या गोंगाटाची तीव्रता 1 बेल असते, मोठ्याने होत असलेल्या बडबडीची तीव्रता 6.5 बेल तर सिंहाच्या डरकाळीची तीव्रता 8.7 बेल असते. यावरून असे दिसून येते की ध्वनीच्या तीव्रतेच्या बाबतीत पानांच्या सरसरीपेक्षा मोठ्याने केलेली बडबड

$$10^{6.5-1}=10^{5.5}=316\,000 \text{ पट}$$

अधिक तीव्र असते, सिंहाची डरकाळी मोठ्याने केलेल्या बडबडीपेक्षा

$$10^{8.7-6.5}=10^{2.2}=158 \text{ पट}$$

अधिक तीव्र असते.

8 बेलपेक्षा अधिक तीव्र असलेला गोंगाट मानवी शरीराच्या दृष्टीने हानीकारक असतो. गोंगाटाच्या घालून देण्यात आलेल्या मर्यादेचे अनेक कारखान्यांमधून उल्लंघन केले जाते: या ठिकाणी 10 बेल तीव्रतेचा

किंवा त्याहूनही जास्त तीव्रतेचा ध्वनी आढळून येतो; पोलादीच्या ऐरणीवर घालण्यात येणाऱ्या हातोड्यांच्या घावापासून निर्माण होणाऱ्या ध्वनीची तीव्रता 11 बेल असते. मान्य मर्यादेपेक्षा हा ध्वनी 100 आणि 1000 पट अधिक तीव्र आहे तर नायगारा धबधब्याच्या आवाजापेक्षा (9 बेल) तो 10=100 पट अधिक तीव्र आहे.

विजेच्या दिव्यांचा प्रकाश आणि लॉगरिथम

प्रश्न :

एकाच धातूची तार बसविण्यात आलेल्या निर्वात दिव्याची आणि वायूने भरलेल्या दिव्याची तुलना केली असता असे दिसून येते की या तारेच्या तपमानातील फरकामुळेच वायूने भरलेला दिवा निर्वात दिव्यापेक्षा अधिक प्रकाश देतो. भौतिकशास्त्रातील नियमानुसार तार पूर्णपणे प्रज्वलीत झाली असता प्राप्त होणाऱ्या एकूण प्रकाशात होणारी वाढ निरपेक्ष तपमानाच्या 12 व्या घाताच्या प्रमाणात असते. हे ठाऊक असताना पुढील हिशेब मांडू. ज्यामधील तारेचे तपमान 2500° निरपेक्ष आहे (म्हणजेच –273° से पासून मोजण्यात आलेले) असा वायूने भरलेला दिवा 2200° पर्यंत तापलेली तार असलेल्या निर्वात दिव्याच्या तुलनेत किती पट जास्त प्रकाश देईल?

उत्तर :

आपणाला हवे असणारे प्रमाण x आहे असे मानल्यास आपणाला पुढील समीकरण प्राप्त होईल.

$$x=\left(\frac{2500}{2200}\right)^{12}=\left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

ज्यावरून

$$\log x=12(\log 25-\log 22);$$

$$x=4.6.$$

निर्वात दिव्यापेक्षा वायूने भरलेला दिवा 4.6 पट जास्त प्रकाश देईल. म्हणजेच जर निर्वात दिवा 50 कँडल प्रकाश देत असेल तर त्याच परिस्थितीत वायूने भरलेला दिवा 230 कँडल प्रकाश देईल.

आणखी एक हिशेब मांडू. दिव्यांच्या तीव्रतेत दुप्पट वाढ करण्यासाठी निरपेक्ष तपमानामध्ये (टक्केवारीत) किती वाढ करण्यात आली पाहिजे?

उत्तर :

पुढील समीकरण मांडू

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{12}=2,$$

ज्यावरून

$$\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\log 2}{12}$$

आणि $x=6\%$

आणि शेवटी शेवटचा हिशेब: जर दिव्यातील तारेच्या तपमानात (निरपेक्ष) 1% ने वाढ झाल्यास दिव्याचा प्रकाश किती तीव्र होईल?

उत्तर :

लॉगरिथमच्या साहाय्याने हिशेब मांडला असता

$$x=1.01^{12}.$$

त्या अर्थी

$$x=1.13$$

दिव्याच्या तीव्रतेत 13 टक्क्याने वाढ होईल.

दिव्यातील तारेच्या तपमानात होणारी वाढ 2 टक्के आहे असे मानून हिशेब मांडल्यास आपणाला आढळून येईल की तीव्रतेत 27% वाढ होईल तर तपमानात 3% ने वाढ केल्यास प्रकाशाच्या तीव्रतेत 43% वाढ होईल.

विद्युत दिवे तयार करणाऱ्या कारखान्यांमधून दिव्याच्या तारेचे तपमान वाढविण्यासाठी प्रयत्न का केले जातात याची आपणाला यावरून कल्पना येईल.

शेकडो वर्षांसाठी मृत्युपत्र

बुद्धिबळाच्या खेळाचा शोध लावणाऱ्याने बक्षीस म्हणून गव्हाच्या दाण्यांची मागणी केली होती. या दाण्यांच्या अजस्त्र संख्येविषयी आपण ऐकला असालच. पटातील पहिल्या चौकटीसाठी जनकाने गव्हाचा 1 दाणा, दुसऱ्या चौकटीसाठी 2 दाणे अशा प्रकारे 65 व्या चौकटीपर्यंत दाण्यांची संख्या मागील चौकटीतील दाण्यांच्या दुप्पट करण्याची मागणी केली होती.

तथापि केवळ संख्येची सातत्याने दुप्पट करीत गेल्यामुळेच काही संख्येत आश्चर्य वाटण्याइतपत वृद्धी होत नाही. इतरही काही साधे सोपे मार्ग आहेत. 5% व्याज मिळवून देणाऱ्या भांडवलात दरवर्षी 1,01 टक्के वृद्धी होत जाते. सकृतदर्शनी असे वाटते की ही वाढ अगदीच क्षुल्लक आहे. परंतु काही काळातच हे भांडवल एका अजस्त्र संख्येचे रूप धारण करते. दीर्घकालीन मृत्युपत्रांमधील भांडवलात एवढी आश्चर्यजनक वृद्धी का होते याचे कारण आता आपल्या ध्यानात आले असेलच. अशाच प्रकारचे एक मृत्युपत्र, अमेरिकेचे विख्यात राजकीय कार्यकर्ते व्ही. फ्रँकलीन यांचे मृत्युपत्र सर्वांना ठाऊक आहे. "व्ही. फ्रँकलीन यांचे संकलित निबंध" या पुस्तकामध्ये हे मृत्युपत्र प्रसिद्ध करण्यात आले आहे. या मृत्युपत्राचा काही भाग पुढीलप्रमाणे आहे:

"बोस्टनवासीयांना एक हजार पौंड देण्यात यावेत. जर त्यांनी ही हजार पौंडाची रक्कम स्वीकारली तर ती काही निवडक नागरिकांना देण्यात यावी, जे ही रक्कम तरुण हस्तकारागिरांना 5 टक्के वार्षिक व्याजाने कर्ज म्हणून देतील. 100 वर्षांमध्ये ही रक्कम 131000 पौंड इतकी वाढेल. माझी अशी इच्छा आहे की त्या वेळी या रकमेपैकी 100000 पौंड सामाजिक इमारतींच्या बांधकामावर खर्च करण्यात यावेत व शिल्लक राहिलेली 31000 पौंडाची रक्कम 100 वर्षांसाठी

व्याजाने कर्ज म्हणून देण्यात यावी. दुसऱ्या शंभर वर्षांच्या काळाच्या अंती ही रक्कम 40 60 000 पौंड होईल. त्यापैकी 10 60 000 पौंड मी बोस्टनवासीयांसाठी ठेवत आहे व बाकी राहिलेले 3 000 000 पौंड मॅसाच्युसेट्सच्या समाजाच्या हाती सुपूर्द करण्यात यावी."

फक्त 1000 पौंडाची रक्कम मागे ठेवून फ्रँकलीन दशलक्षावधी रकमेच्या वाटणीवर विचार करतात. येथे, तथापि, विचित्र असे काहीच नाही. गणिती हिशेब आपणाला याच गोष्टीची खात्री करून देतात की मृत्युपत्रातील विचार पूर्णपणे वास्तविक आहेत. 1000 पौंडांमध्ये दर-वर्षी 1·05 पट वाढ होत जाते व 100 वर्षांनंतर हीच रक्कम

$$x = 1\,000 \times 1.05^{100} \text{ पौंड}$$

इतकी झाली पाहिजे.

हाच हिशेब लॉगरिथमच्या मदतीने मांडता येईल :

$$\log x = \log 1000 + 100 \log 1.05 = 5.11\,893$$

त्या अर्थी

$$x = 131\,000.$$

मृत्युपत्रात या रकमेचा उल्लेख आहेच. पुढे पुढील 100 वर्षांच्या काळात 31000 पौंडाची रक्कम वाढत जाऊन

$$y = 31\,000 \times 1.05^{100}$$

इतकी होईल. त्या अर्थी, लॉगरिथमची मदत घेतली असता आपणाला आढळून येईल की

$$y = 4\,076\,500.$$

मृत्युपत्रात जवळजवळ एवढ्याच (थोडासाच फरक आहे.) रकमेचा उल्लेख आहे.

साल्तिकोव यांच्या "श्री. गलोव्हल्योव" या गोष्टीत नमूद करण्यात आलेले एक कोडे आमच्या वाचकांनी स्वतः सोडवावे म्हणून देत आहे :

"परफीरीई व्लादीमिरोविच आपल्या खोलीत बसलेले असून काग-

दांवर हिशेब, आकडेवारी मांडण्यामध्ये ते व्यस्त दिसत आहेत. या क्षणी त्यांच्या डोक्यामध्ये प्रश्न उठला आहे: त्यांच्या जन्माच्या वेळी आजोबांनी त्यांना दातांसाठी दिलेले 100 रुबल त्यांच्या आईने स्वतः-साठी न वापरता जर सावकाराकडे त्यांच्या नावाने व्याजाने ठेवले असते तर आज त्यांच्याजवळ किती पैसे असले असते? तथापि, हिशेब मांडला असता असे दिसून येते की ही रक्कम काही इतकी मोठी नाही: फक्त आठशे रुबल."

जर आपण असे गृहीत धरले की परफीरीईंचे हा हिशेब मांडते वेळीचे वय 50 वर्षे आहे आणि त्यांनी हिशेब बरोबर मांडलेला आहे (अर्थात ही गोष्ट बरीचशी संशयातीत आहे कारण गलोव्हल्योवना लॉगरिथम ठाऊक नव्हते व टक्केवारी काढण्याचे किचकट काम ते यशस्वी-रित्या करू शकले असावेत असे वाटत नाही) तर त्या वेळी सावकार किती टक्के व्याज देत होता हे आपणाला काढावयाचे आहे.

भांडवलात अखंड वृद्धी

बँकांमधून दरवर्षी व्याजाची रक्कम मुद्दलामध्ये मिळवली जाते. जर मुद्दलात अनेकदा व्याज मिळवले जाईल तर मुद्दलात वेगाने वृद्धी होत जाईल कारण मोठ्या रकमेवर व्याज दिले जाईल. एक साधे सैद्धांतिक, अत्यंत सोपे उदाहरण घेऊ. 100% व्याजाने बँकेमध्ये 100 रुबल ठेवले आहेत असे समजू. जर केवळ वर्षाच्या अखेरीसच मूळ मुद्दलामध्ये व्याज मिळवले जात असेल तर या काळात 100 रुबलचे 200 रुबल होतील. मुद्दलावर वर्षातून दोनदा, दर सहमाहीस व्याज मिळवले जात असेल तर 100 रुबलचे किती रुबल होतील ते आता आपण पाहू. सहा महिन्यांनी शंभर रुबलचे

$$100 \text{ रुबल} \times 1.5 = 150 \text{ रुबल}$$

होतील. आणखी सहा महिन्यांनी

$$150 \text{ रुबल} \times 1.5 = 225 \text{ रुबल}$$

होतील. जर प्रत्येक चार महिन्यांनी 100 टक्के दराने मुद्दलात व्याज मिळवले जात असेल तर 100 रुबलचे वर्षाअखेरीस

$$100 \text{ रुबल} \times \left(1 \frac{1}{3}\right)^3 \approx 237 \text{ रुबल } 03 \text{ कोपेक होतील.}$$

व्याज मिळविण्याचा कालखंड अधिक वारंवार म्हणजे 0·1 वर्ष, 0·01 वर्ष, 0·001 वर्ष इ. करू. म्हणजे वर्षाअखेरीस 100 रुबलचे अनुक्रमे :

$$100 \text{ रुबल} \times 1.1^{10} \approx 259 \text{ रुबल } 37 \text{ कोपेक},$$
$$100 \text{ रुबल} \times 1.01^{100} \approx 270 \text{ रुबल } 48 \text{ कोपेक},$$
$$100 \text{ रुबल} \times 1.001^{1000} \approx 271 \text{ रुबल } 69 \text{ कोपेक}$$

होतील.

उच्च गणितातील पद्धतींचा अवलंब केला असता असे सिद्ध करून दाखविता येईल की व्याजकाळ अमर्यादपणे कमी करत गेल्यास मुद्दलात अमर्याद वाढ होत नाही तर ते एक ठराविक मर्यादा गाठते आणि ही मर्यादा-रक्कम जवळजवळ

271 रुबल 83 कोपेक

इतकी असते. 100 टक्के दराने ठेवलेल्या रकमेत 2.7183 पटीपेक्षा जास्त वाढ होऊ शकत नाही, मग प्रत्येक सेकंदास जरी व्याजाची रक्कम मिळवत गेले तरीही.

संख्या "e"

आपण वर प्राप्त केलेली 2.718... ही संख्या, जी उच्च गणितशास्त्रामध्ये महत्त्वपूर्ण भूमिका वटविते, कदाचित π या संख्येपेक्षा कमी, छोटी नाही आणि ती खास प्रकारे व्यक्त केली जाते =e. ही अपरिमेय संख्या (अकल्य संख्या) आहे: ती अचूकरित्या पूर्णपणे व्यक्त करता

येत नाही * पण कोणत्याही अचूक घाताच्या साहाय्याने, पुढील पद्धतीचा वापर करून ती फक्त अदमासे व्यक्त करता येते :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\ldots$$

वर आपण मुद्दलात कशा प्रकारे वाढ होत जाते हे पहात असताना आपल्या सहजगत्या ध्यानात आले की e ही संख्या

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

या राशीची मर्यादा आहे, n ची किंमत कितीही ठेवली तरीही).

लॉगरिथम पद्धतीचा पाया म्हणून e संख्या स्वीकारणे अतिशय सोयीस्कर व फायदेशीर आहे. यामागे अनेक कारणे आहेत. अशा प्रकारची लॉगरिथम कोष्टके ("नैसर्गिक लॉगरिथमे") अस्तित्वात आहेत आणि विज्ञान व तंत्रक्षेत्रामधून त्यांचा व्यापक प्रमाणावर उपयोग करून घेतला जात आहे. यापूर्वी आपण ज्यांचा विचार केला होता ती 48, 61, 102 आणि 206 अंकी लॉगरिथमे याच e संख्येवर आधारित आहेत.

अनेक ठिकाणी अगदी अनपेक्षितरित्या e संख्या अवतरते. उदाहरणादाखल आपण पुढील कोडे सोडवू :

आपणास देण्यात आलेल्या a या संख्येचे विभाजन अशा भागांमध्ये कशा प्रकारे करता येईल की ज्या सर्व भागांच्या गुणाकाराचे फल जास्तीत जास्त मोठे होईल ?

आपणाला ठाऊक आहेच की ठराविक बेरीज राखून संख्या जास्तीत जास्त मोठे गुणनफल अशा वेळी देतात, जेव्हा त्या समान असतात. यावरून स्पष्ट होते की a या संख्येचे समान भागात विभाजन करण्यात आले पाहिजे. पण किती समान भागात? दोन, तीन, दहा? उच्च

---

* याव्यतिरिक्त ही संख्या π प्रमाणेच दृश्यातीत आहे, म्हणजेच अखंड स्थिरांकांनी मांडल्या जाणाऱ्या कोणत्याही प्रकारच्या बैजिक समीकरणाची सोडवणूक केली असताना ही संख्या प्राप्त होऊ शकत नाही.

गणितशास्त्रातील पद्धतीचा अवलब करून असे सिद्ध करता येईल की जेव्हा संख्येचे शक्यतो जवळजवळ e संख्येइतक्या भागात विभाजन केले असता या भागांचा गुणाकार जास्तीत जास्त मोठा असतो.

उदाहरणार्थ 10 या संख्येचे जवळजवळ 2.718 समान भागात विभाजन करावयाचे आहे म्हणजेच

$$\frac{10}{2.718}=3.678\ldots$$

ज्या अर्थी 3.678... चे समान भागांमध्ये विभाजन करता येणे अशक्य आहे, त्या अर्थी आपण नजिकची पूर्ण संख्या विचारात घेऊ. ही संख्या आहे 4. परिणामी 10 या संख्येच्या समान भागांच्या गुणाकाराचे फल जास्तीत जास्त मोठे तेव्हाच असू शकेल जेव्हा या संख्येचे $\frac{10}{4}$ म्हणजेच 2.5 समान भागात विभाजन केले जाईल. याचाच अर्थ

$$(2.5)^4=39.0625$$

हीच अशी मोठी संख्या आहे जी आपणाला 10 च्या समान भागांचा गुणाकार करून प्राप्त होऊ शकेल. खरोखरच, 10 चे 3 किंवा 5 समान भागात विभाजन केले असता या भागांचे आपणाला अनुक्रमे पुढील गुणनफल प्राप्त होते:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3=37$$
$$\left(\frac{10}{5}\right)^5=32.$$

समान भागांचा जास्तीत जास्त मोठा गुणाकार प्राप्त करण्यासाठी 20 या संख्येचे 7 समान भागात विभाजन केले पाहिजे, कारण

$$20\div2.718\ldots=7.36\approx7.$$

50 या संख्येचे 18 समान भागात, तर 100 या संख्येचे 37 समान भागात विभाजन केले पाहिजे, कारण

$$50\div2.718\ldots=18.4$$
$$100\div2.718\ldots=36.8$$

गणित, भौतिकशास्त्र, खगोलशास्त्र व इतर अनेक शास्त्रशाखांमध्ये ही संख्या महत्त्वपूर्ण भूमिका वठविते. उदाहरणादाखल आम्ही काही अशा प्रश्नांची यादी देत आहोत (ही यादी अमर्याद आहे.) ज्या प्रश्नांच्या गणितीय सोडवणुकीमध्ये e संख्येचा उपयोग करून घेतला जातो :

वायुदाबमापकाचे सूत्र, आयलेरचे सूत्र *
वस्तूच्या थंड होण्यासंबंधित नियम ;
किरणोत्सारजन्य ऱ्हास आणि पृथ्वीचे वय ;
लंबकाची हवेमधील आंदोलने.
अग्निबाणांच्या वेगासंबंधित त्सिआलकोव्ह यांचे सूत्र ; **
पेशीची वाढ.

लॉगरिथमीय सुखान्तिका

प्रश्न :

पाचव्या प्रकरणामध्ये वाचकाची गणितीय सुखान्तिकांशी ओळख झाली आहेच. $2>3$ या असमानतेची सिद्धता पटवून देणारे आणखी एक उदाहरण येथे देत आहोत. या वेळी सिद्धता लॉगरिथमच्या सहभागाने केली जात आहे. "सुखान्तिके"चा प्रारंभ पुढील असमानतेने होत आहे :

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}.$$

जे निर्विवाद सत्य आहे. पुढे आपण पुनर्रचना करू :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

* याविषयी अधिक माहिती माझ्या "मनोरंजक भौतिकशास्त्र" भाग 2 मध्ये वाचावयास मिळेल. (मराठी भाषेत उपलब्ध).

** माझे "अंतर्ग्रहीय प्रवास" हे पुस्तक पहा.

येथेही कोणतीही शंका डोकावत नाही. मोठ्या संख्येचा लॉगरिथम मोठाच असतो, म्हणजेच,

$$2 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right).$$

दोन्ही बाजूंकडील $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ वगळता: $2>3$, या सिद्धतेत कोणती चूक आहे?

उत्तर:

जेव्हा आपण दोन्ही बाजूकडील $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ ही राशी वगळली तेव्हा आपण असमानतेचे चिन्ह ($>$ च्या ऐवजी $<$) बदलले नाही येथेच आपली चूक झाली; शिवाय, ज्या अर्थी $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ ही संख्या ऋण आहे त्या अर्थी हे करणे जरूरीचे होते. (जर आपण 10 वर आधारित लॉगरिथम विचारात न घेता त्याहून छोटा, $\frac{1}{2}$ हून छोटा लॉगरिथम विचारात घेतला असता तर $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ ही राशी धन झाली असती, पण त्या वेळी आपणाला मोठ्या संख्येचे लॉगरिथमीय फल मोठे असते हा मुद्दा मांडता आला नसता.)

तीन 2 असलेली कोणतीही संख्या

प्रश्न:

या पुस्तकाची समाप्ती बीजगणितामधील एका अशा किचकट कोड्याने करीत आहे, ज्या कोड्याने ओडेसा येथे भरलेल्या भौतिक-शास्त्रावरील परिषदेतील सर्व सदस्यांचे चांगलेच मनोरंजन केले होते. कोडे पुढीलप्रमाणे आहे: देण्यात आलेली कोणतीही संख्या तीन '2' च्या आणि गणितामधील चिन्हांच्या साहाय्याने कशा प्रकारे व्यक्त करता येईल?

उत्तर :

प्रथम एक संख्या विचारात घेऊन त्याच्या आधारावर हे कोडे सोडविता येते हे सिद्ध करू. असे समजू की ही संख्या 3 आहे. तर मग कोडे अशा प्रकारे सोडविता येईल :

$$3=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

या समीकरणाची सहजगत्या सिद्धता करता येईल. खरोखरच,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2^3}}=2^{2^{-3}}$$

$$\log_2 2^{2^{-3}}=2^{-3},$$

$$-\log_2 2^{-3}=3.$$

जर 5 ही संख्या दिली गेली असती तर आपण हे कोडे याच पद्धतीने सोडविले असते :

$$5=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

यावरून दिसून येईल की वर्गमूळामध्ये मूळाचा घातांक लिहिला जात नाही.

एकंदरीत कोड्याचे उत्तर पुढील प्रकारे असेल. जर आपणाला देण्यात आलेली संख्या N असेल तर

$$N=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N\text{ वेळा}}.$$

मीर प्रकाशन

ललित विज्ञान साहित्य

प्रसिद्ध होत आहे

ऊर्जाशास्त्र – आज आणि उद्या

ले.: व्ला. किरिलीन

आजच्या जगामध्ये ऊर्जेचा तीव्र तुटवडा भासत आहे. ऊर्जेच्या नैसर्गिक पुरवठ्यात वेगाने घट होत आहे. यामुळेच आज साऱ्यांचे लक्ष ऊर्जाशास्त्राकडे वेधून घेतले गेले आहे. व्ला. किरिलीन हे एक प्राख्यात सोविएत ॲकॅडमीशीयन व ऊर्जाशास्त्रज्ञ आहेत. "**ऊर्जाशास्त्र – आज आणि उद्या**" या आपल्या पुस्तकामध्ये त्यांनी या क्षेत्रामधील निरनिराळ्या समस्यांवर सविस्तर चर्चा केली आहे. मानवाची आजची ऊर्जेची भूक किती आहे? तो आज आपली गरज कशा प्रकारे मिटवित आहे? तेल, नैसर्गिक वायू, कोळसा इत्यादींचे नैसर्गिक साठे आणखी किती काळ पुरतील? मानव कोणत्या नव्या ऊर्जा-साधनांचा शोध घेत आहे? अशा प्रकारच्या अनेक ज्वलंत प्रश्नांची उत्तरे आपणास या पुस्तकात मिळतील. जड पाण्याचे ऊर्जा-क्षेत्रातील महत्त्व, आज वापरात असलेल्या अणु-भट्ट्या, त्यांचे गुण-दोष, नैसर्गिक ऊर्जा-साधनांचा किफायतशीर वापर, सौर ऊर्जेच्या व इतर नैसर्गिक ऊर्जांच्या भावी वापरा-संबंधित यश शक्यता इत्यादी विषयांवरील सविस्तर विवेचनदेखील आपणाला या पुस्तकात वाचावयास मिळेल. याव्यतिरिक्त माहितीपूर्ण, रंगीत चित्रांच्या आणि आकृत्यांच्या साहाय्याने देण्यात आलेली इतरही काही विषयांवरील मनोरंजक माहिती आपणाला या पुस्तकात आढळून येईल.

मीर प्रकाशन

आमची आगामी प्रकाशने

मनोरंजक इलेक्ट्रॉनिक्स

ले.: इ. सिदोव

आधुनिक काळातील एक अत्यंत महत्त्वाचे आणि आघाडीवरील विज्ञानक्षेत्र – इलेक्ट्रॉनिक्स किती मनोरंजक आहे याची प्रचीती आणून देणारे एक आगळे आणि वाचनीय पुस्तक. रेडिओच्या शोधापासून अत्याधुनिक गणकयंत्रापर्यंतच्या काळाचे सविस्तर विवेचन या पुस्तकात आपणास वाचावयास मिळेल. अत्यंत सोप्या आणि विनोदी भाषेत लिहिलेले हे पुस्तक आपल्या वैयक्तिक आणि शालेय ग्रंथसंग्रहालयात हवेच हवे.

